

Renato Betti (Politecnico di Milano)
La simmetria, in matematica e nell'arte

In questa conferenza Renato Betti si sofferma sugli aspetti “artistici” della matematica in relazione alle proprietà delle simmetrie e delle altre isometrie. Dopo aver esposto le caratteristiche del suo nuovo libro, il relatore mostra alcuni esempi di simmetria nella natura e nell'arte. La formalizzazione di simmetria in matematica con la definizione dei gruppi di simmetria è stata realizzata per la prima volta dai cristallografi nel XIX secolo. Nell'Alhambra di Grenada, costruita nel XIII secolo, sono rappresentati tutti e 17 i gruppi di simmetria corrispondente ai mosaici finora formalizzati in matematica. L'autore era presente nei momenti prossimi alla scoperta dell'ultimo dei diciassette gruppi di simmetria rappresentati da uno dei mosaici dell'Alhambra.

La storia della matematica delle simmetrie

La formalizzazione della simmetria non è presente nei lavori dei matematici antichi: Euclide negli “Elementi” non analizza gli aspetti di questa proprietà delle figure anche se analizza figure che godono di queste proprietà. Neanche Platone, con i suoi solidi regolari, si sofferma su questi aspetti. Nel XIII secolo, furono gli artisti che realizzarono i rosoni, i fregi e i mosaici a studiare per primi i vari tipi di simmetria ma non lasciarono nulla di scritto. Dopo aver esposto le definizioni matematiche di simmetria come isometria, Renato Betti si sofferma sugli aspetti estetici legati al concetto di simmetria e asimmetria.

Quanta simmetria ha una figura? Quali modelli di simmetria possiamo identificare in una figura?

Isometrie sinistrorse e destrorse, numero e tipo di isometrie applicate, possono aiutarci a classificare differenti figure. Le isometrie formano un gruppo algebrico con l'esistenza dell'elemento inverso, dell'elemento neutro e con le relative proprietà algebriche. Le uniche isometrie piane sono traslazioni, rotazioni, riflessioni e glisso riflessioni (teorema di Chasles, 1793-1880). Le composizioni di varie isometrie rappresentano ancora isometrie e svolgere esercizi di questo tipo con gli studenti non sempre porta a risultati intuitivi. Renato Betti ci introduce ai gruppi di simmetria definendo i gruppi discreti e i gruppi finiti di isometrie piane.

Rosoni, fregi e mosaici

A seconda delle tipologie di isometria e dei gruppi possiamo allora arrivare a definire rosoni, fregi e mosaici. Il relatore ha selezionato esempi di queste rappresentazioni in varie epoche della storia dell'uomo, a partire dal paleolitico e/o neolitico. Già Leonardo arrivò a formulare un teorema sui gruppi di simmetria senza però dimostrarlo in modo formale: “un gruppo finito di isometrie è un gruppo ciclico o un gruppo diedrale”. Hermann Weil, nei suoi ultimi anni di vita, si dedica alla scrittura di un libro dedicato unicamente alle simmetrie, in cui descrive le differenti tipologie di figure simmetriche in modo esaustivo. Per classificare i vari tipi di rosone dobbiamo rifarci ai concetti matematici di gruppi diedrali e gruppi ciclici. Per classificare i vari tipi di fregio Renato Betti mostra un diagramma ad albero. Esistono sette tipi diversi di fregi, ognuno contrassegnato con una notazione posizionale a quattro simboli spiegata dal relatore. Infine, per la classificazione dei mosaici (anche detti gruppi cristallografici piani o gruppi da carte da parati o anche arabeschi) si parla di ordine 1,2,3,4 e 6. Un teorema di fine '800 dimostra come modelli pentagonali non possono riempire il piano. Anche per i gruppi cristallografici piani, il relatore mostra un grafo con i 17 tipi di mosaici possibili.

In altri spazi e in altre dimensioni

È possibile costruire figure simmetriche anche in differenti spazi geometrici. Famosi sono i disegni di Escher nel piano iperbolico definito da Poincaré. In altre dimensioni, invece, si possono considerare i lavori in tre

dimensioni dei cristallografi che hanno classificato fino a 230 gruppi diversi di simmetria. Si possono però considerare anche dimensioni superiori. Renato Betti afferma che non esiste ad oggi un teorema che legni il numero di dimensioni al numero possibile di differenti gruppi di mosaici che si possono costruire in tale spazio. Il famoso gruppo mostro M , il più grande dei gruppi finiti e semplici, di ordine 10 alla 53, è anch'esso un gruppo di simmetria, di tipo rotazionale.

Una bibliografia sulla simmetria

Prima di concludere, Renato Betti descrive i volumi e gli articoli della sua bibliografia sintetica sulla simmetria. Oltre al testo già citato di Hermann Weil del 1962, il relatore consiglia il testo di G. Caglioti, "Simmetrie infrante, nella scienza e nell'arte", e il libro di S.V. Jablan, "Theory of simmetry and ornaments", il quale contiene moltissime rappresentazioni e figure sull'argomento. A livello teorico, il testo di M. A. Armstrong "Group and simmetry" del 1988, spiega la teoria dei gruppi tramite la simmetria e la costruzione delle strutture.

A cura di Gianfranco Lucchese