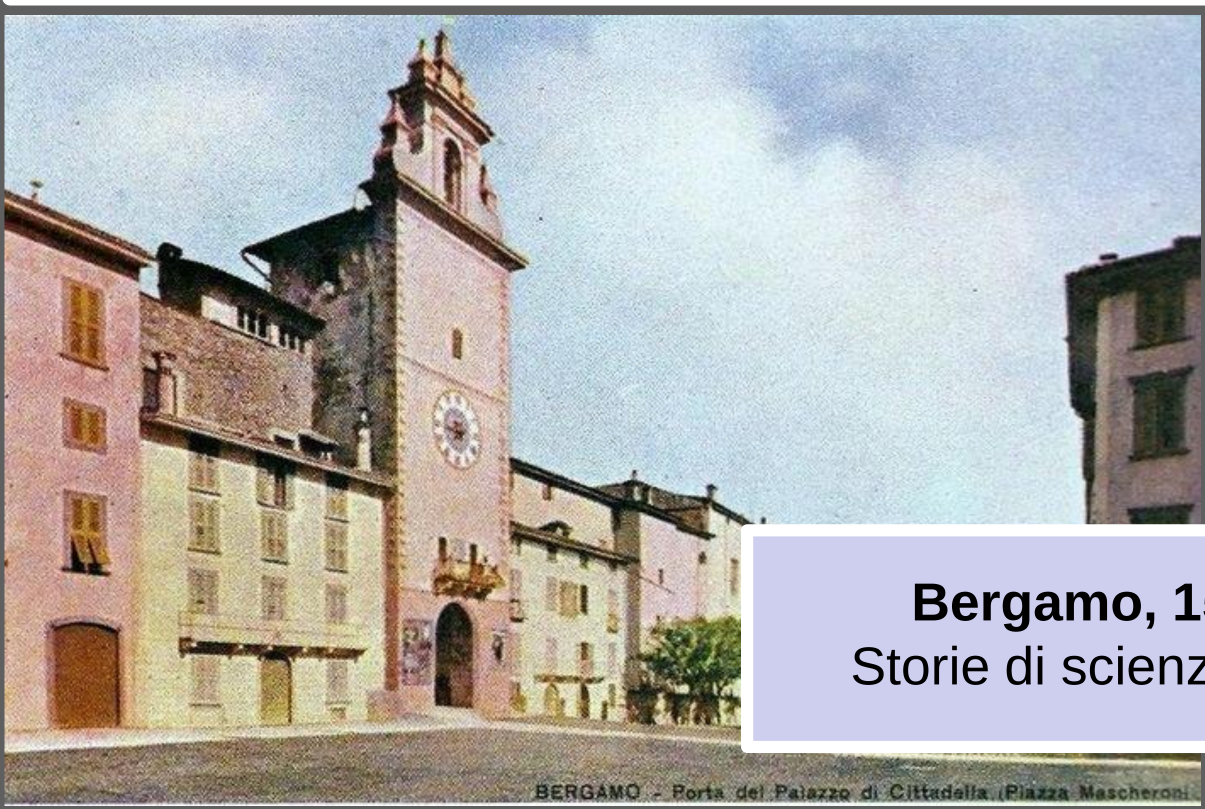
Leggere e rileggere Euclide

Spunti per l’insegnamento della geometria

Paola Gario

Dipartimento di Matematica “F. Enriques”

Università degli Studi di Milano



Bergamo, 15 novembre 2019

Storie di scienza: personaggi e idee

La geometria sintetica e il suo insegnamento

Le *Indicazioni Nazionali* e le *Linee Guida* valorizzano le funzioni dell'insegnamento-apprendimento della geometria sintetica, in particolare nel primo biennio.

Il primo biennio avrà come obiettivo la conoscenza dei fondamenti della **geometria euclidea del piano**.
Verrà chiarita l'importanza e il significato dei concetti di **postulato, assioma, definizione, teorema, dimostrazione**, con particolare riguardo al fatto che, a partire dagli Elementi di Euclide, essi hanno permeato lo sviluppo della matematica occidentale… l'approccio euclideo non sarà ridotto a una formulazione puramente assiomatica …

La realizzazione di **costruzioni geometriche** elementari sarà effettuata sia mediante strumenti tradizionali (in particolare la riga e compasso …) sia mediante programmi informatici di geometria.

Lo studente apprenderà a far uso del **metodo delle coordinate cartesiane**,
in una prima fase limitato alla rappresentazione di punti e rette nel piano
e di proprietà come il parallelismo e la perpendicolarità …

Ind. Nazionali- Liceo Sci. e Sc. Applicate.
Obiettivi Specifici_Primo Biennio

e di approccio sintetico si parla anche nel secondo biennio … e comunque ad esso si collega

Le **sezioni coniche** saranno studiate sia da un punto di vista geometrico sintetico che analitico. Inoltre, lo studente approfondirà la comprensione della specificità dei due approcci (sintetico e analitico) allo studio della geometria.

Studierà e saprà **applicare i teoremi** che permettono la **risoluzione dei triangoli**.

Affronterà l'**estensione allo spazio** di alcuni temi e di alcune tecniche della geometria piana anche **al fine di sviluppare l'intuizione geometrica**. In particolare, studierà le posizioni reciproche di rette e piani nello spazio, il parallelismo e la perpendicolarità.

Ind. Nazionali- Liceo Sci. e Sc. Applicate.
Obiettivi Specifici_Secondo Biennio

e solo al quinto anno…

L'introduzione delle coordinate cartesiane nello spazio permetterà allo studente di studiare dal punto di vista analitico rette, piani e sfere.

Ind. Nazionali- Liceo Sci. e Sc. Applicate.
Obiettivi Specifici_Quinto Anno

Problema 1

Data la retta r di equazione x-y = 0, si conduca per il punto P* (2; 2) *la retta s perpendicolare alla retta r. Determinare i punti di intersezione tra la retta s e gli assi.

Questi sono i compiti di Luisa e di Matteo

Luisa

La retta r è la bisettrice del I quadrante.

OP'PP'' è un quadrato (vedi figura).

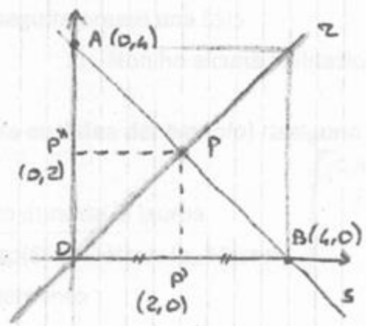
OP è una diagonale di questo quadrato.

Dato che la retta s è ⊥ alla retta r,

r e s sono diagonali di un quadrato

che ha lato doppio del precedente.

Quindi i punti richiesti sono vertici di questo quadrato: A(0,4), B(4,0).



Matteo

$r: y = 1 \cdot x$

$m_s = -\frac{1}{m_r} = -1$

$y_P = m_s x_P + q$

$2 = -1 \cdot 2 + q \Rightarrow q = 4$

$s: y = -1 \cdot x + 4$

$s \cap$ asse x $\begin{cases} y = -x+4 \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 0 = -x+4 \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases}$ Q (4,0)

$s \cap$ asse y $\begin{cases} y = -x+4 \\ x = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0+4 \\ x = 0 \end{cases}$ R (0,4)

L'esercizio vale 5 punti.

Quanti punti dai a Luisa e quanti a Matteo?

https://sites.google.com/site/mateunimilano/attivita-2011-2012/attivita-2012-2013/questionario-l-insegnamento-della-geometria *compito di Luisa:*

La retta r è la bisettrice del I quadrante.

OP'PP'' è un quadrato (vedi figura).

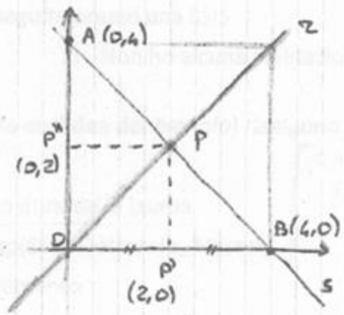
OP è una diagonale di questo quadrato.

Dato che la retta s è ⊥ alla retta r,

r e s sono diagonali di un quadrato

che ha lato doppio del precedente.

Quindi i punti richiesti sono vertici di questo quadrato: A(0,4), B(4,0).



compito di Matteo:

$r : y = 1 \cdot x$

$m_s = -\frac{1}{m_r} = -1$

$y_P = m_s x_P + q$

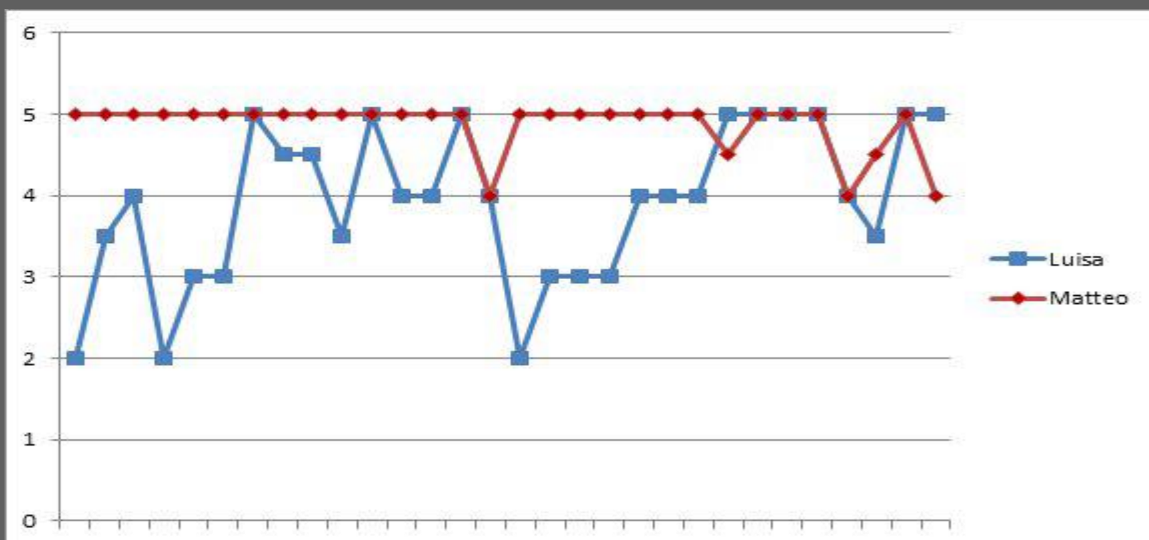
$2 = -1 \cdot 2 + q \Rightarrow q = 4$

$s : y = -1 \cdot x + 4$

$s \cap$ asse x $\begin{cases} y = -x+4 \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 0 = -x+4 \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases}$ $Q(4,0)$

$s \cap$ asse y $\begin{cases} y = -x+4 \\ x = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0+4 \\ x = 0 \end{cases}$ $R(0,4)$

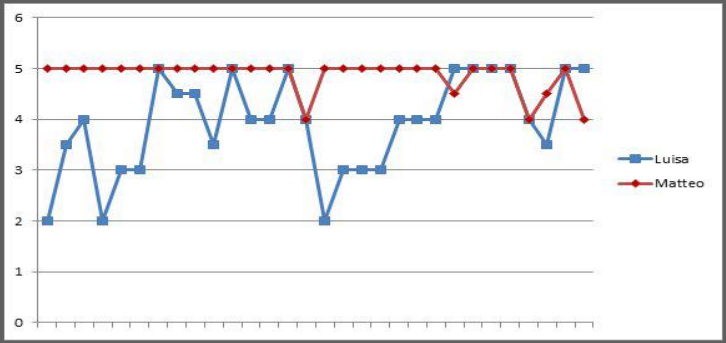
La valutazione di un gruppo di insegnanti (30)



Matteo: v. medio 4.9

Luisa: v. medio 3.9

https://sites.google.com/site/mateunimilano/attivita-2011-2012/attivita-2012-2013/questionario-l-insegnamento-della-geometria



- Solo 5 hanno assegnato punteggio pieno a Luisa, 9 invece a Matteo.
- Solo 2 hanno dato più punti a Luisa.

La valutazione più bassa data alla risoluzione sintetica è così motivata

non è rigorosa perché poggia su intuizioni visive

«*Luisa usa molte spiegazioni verbali e poca matematica, Matteo il contrario*»

è fuori tema perché usa argomenti 'vecchi' che **non** sono oggetto di verifica e così non dimostra di avere padronanza dei metodi analitici

Clausola implicita del 'contratto didattico'

La motivazione di chi invece ha dato punteggio max a entrambi

« *Valuto nello stesso modo e con il punteggio massimo entrambi i compiti: suppongo che i due studenti abbiano scelto di ragionare e applicare il metodo di soluzione a loro più affine*»

La visione geometrica del problema

compito di Matteo:

$r : y = 1 \cdot x$

$m_s = -\frac{1}{m_r} = -1$

$y_P = m_s x_P + q$

$2 = -1 \cdot 2 + q \Rightarrow q = 4$

$s : y = -1 \cdot x + 4$

$s \cap$ asse x $\begin{cases} y = -x+4 \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 0 = -x+4 \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases}$ $Q(4,0)$

$s \cap$ asse y $\begin{cases} y = -x+4 \\ x = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0+4 \\ x = 0 \end{cases}$ $R(0,4)$

Nel compito di Matteo non c'è la figura!

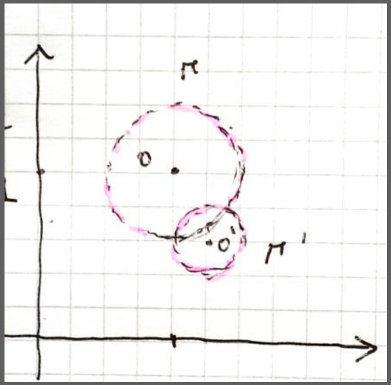
Problema 2

Sono date due circonferenze, una di centro C (4, 5) *e di raggio uguale a* 2*, l'altra di centro C'* (5, 3) *e di raggio uguale a* 1*. Si determini l'equazione della retta passante per i loro punti d'intersezione.*

Lo studente scrive le equazioni delle due circonferenze, le mette a sistema e lo risolve trovando così le coordinate dei due punti d'intersezione.
Ottiene per una delle coordinate un numero negativo.

Come Matteo lo studente non ha fatto il disegno.

Lo studente non ha la visione geometrica del problema e va avanti.



La soluzione **no**n poteva essere trovata graficamente.

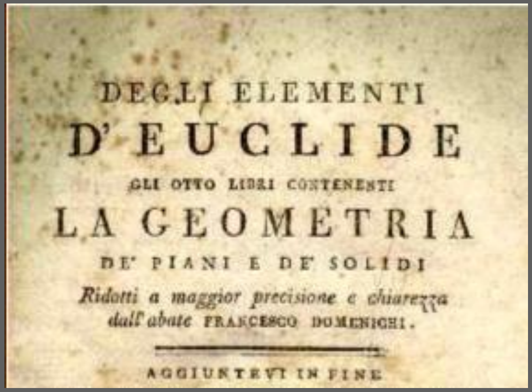
Il disegno avrebbe avuto una **funzione di controllo**.

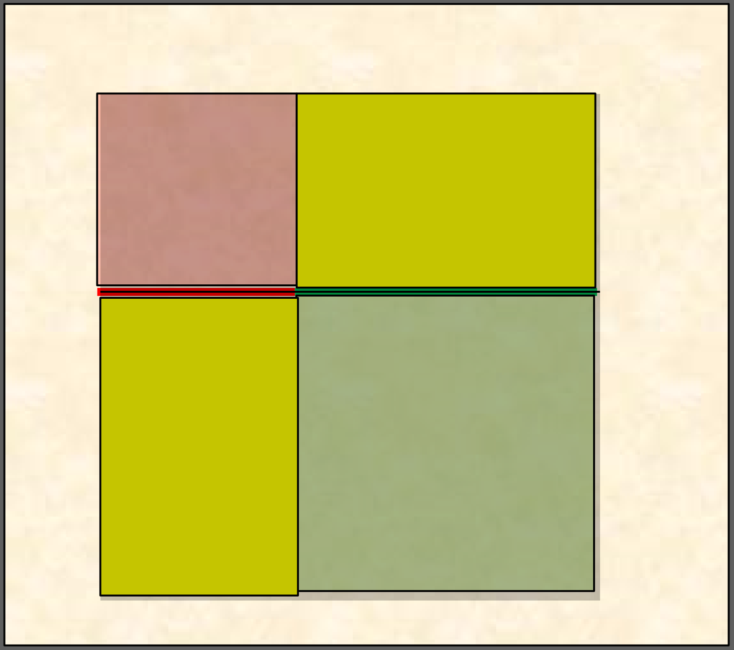
Un *errore* ricorrente…

$$x + 12 + (x+5)^2 = x + 12 + x^2 + 25$$
$$= x^2 + x + 37$$

E’ solo distrazione?

Gli Elementi di Euclide - Libro II


DEGLI ELEMENTI
D' EUCLIDE
GLI OTTO LIBRI CONTENENTI
LA GEOMETRIA
DE' PIANI E DE' SOLIDI
Ridotti a maggior precisione e chiarezza dall'abate FRANCESCO DOMENICHI.
AGGIUNTEVI IN FINE



PROPOSIZIONE 4.

Se si divide a caso una linea retta, il quadrato di tutta la retta è uguale alla somma dei quadrati delle parti e del doppio del rettangolo compreso dalle parti [*stesse*] [a] [3].

Infatti, si divida a caso la linea retta AB in C. Dico che il quadrato di AB è uguale alla somma dei quadrati di AC, CB e del doppio del rettangolo compreso da AC, CB.

I testi di Euclide sono tratti dagli «Elementi» a cura di A. Frajese e L. Maccioni, editi dalla UTET (prima ed. 1970).

Il quadrato del binomio: $(a + b)^2$

Immagine mentale procedurale

$$(a+b)\cdot(a+b)=$$

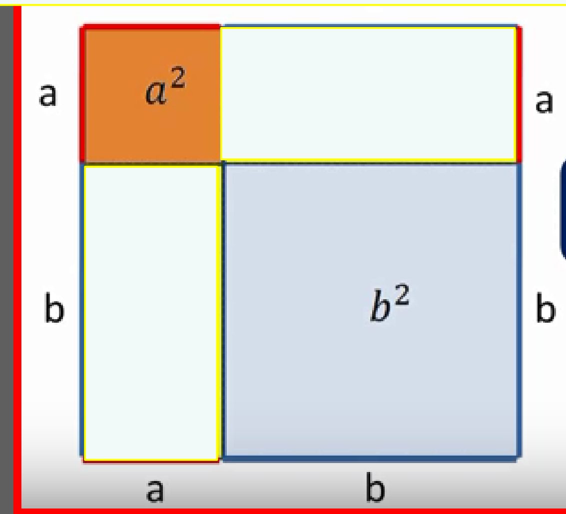
$$(a+b)^2=(a+b)\cdot(a+b)=a^2+ab+ba+b^2=$$

sommando i monomi simili, otteniamo

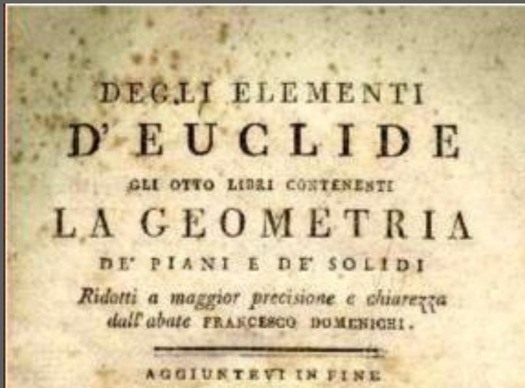
$$=a^2+2ab+b^2$$

Immagine mentale geometrica

Il quadrato di lato a + b



… non è la somma dei due quadrati di lati a e b, rispettivamente


DEGLI ELEMENTI
D' EUCLIDE
GLI OTTO LIBRI CONTENENTI
LA GEOMETRIA
DE' PIANI E DE' SOLIDI
Ridotti a maggior precisione e chiarezza
dall'abate FRANCESCO DOMENICHI.
AGGIUNTEVI IN FINE

L'uguaglianza in estensione

La teoria dell'equiestensione secondo Euclide

Libro I – Nozioni Comuni

I. Cose che sono uguali ad una stessa cosa sono uguali anche fra di loro.

II. E se cose uguali sono addizionate a cose uguali, le totalità sono uguali.

III. E se da cose uguali sono sottratte cose uguali, i resti sono uguali.

IV. E cose che coincidono fra loro sono fra loro uguali.

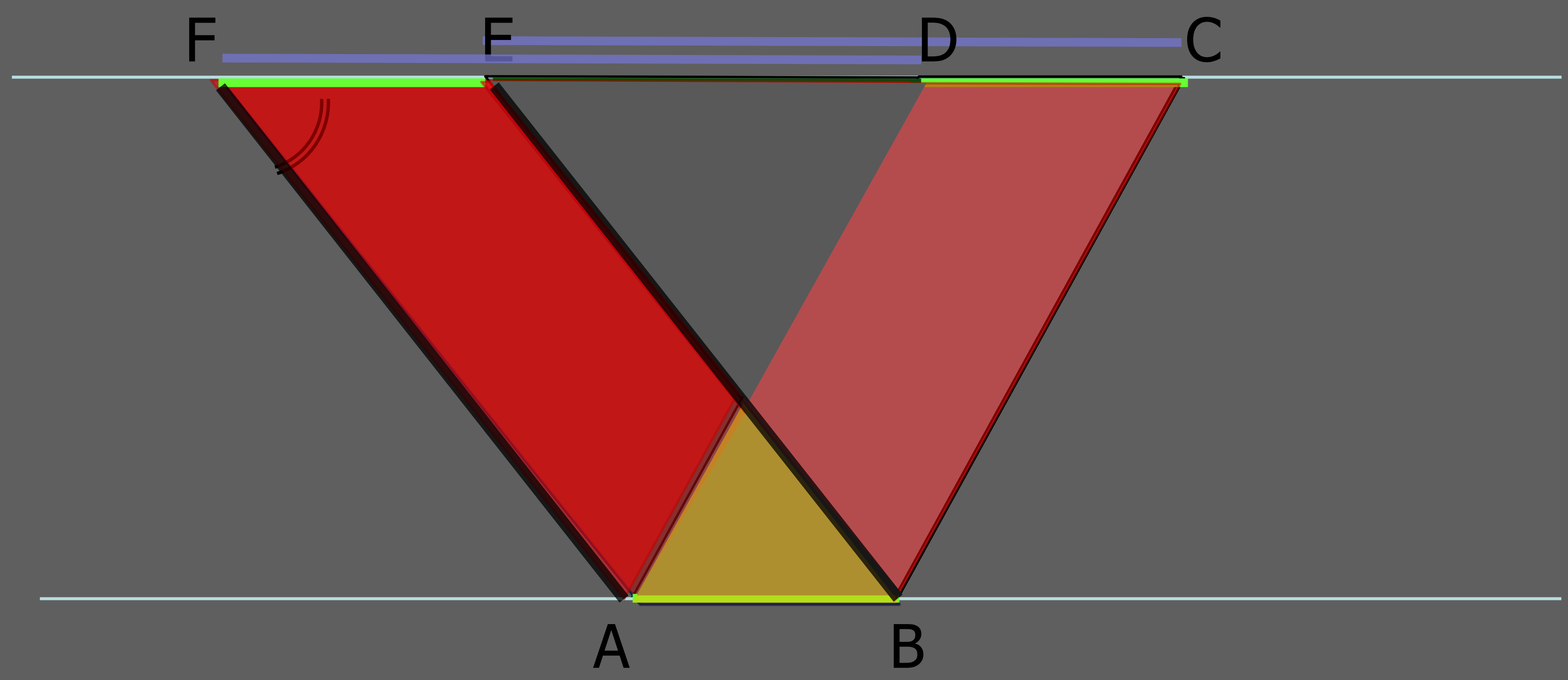
…

VII. Ed il tutto è maggiore della parte.

Libro I e Libro II

Il teorema fondamentale dell'equiestensione

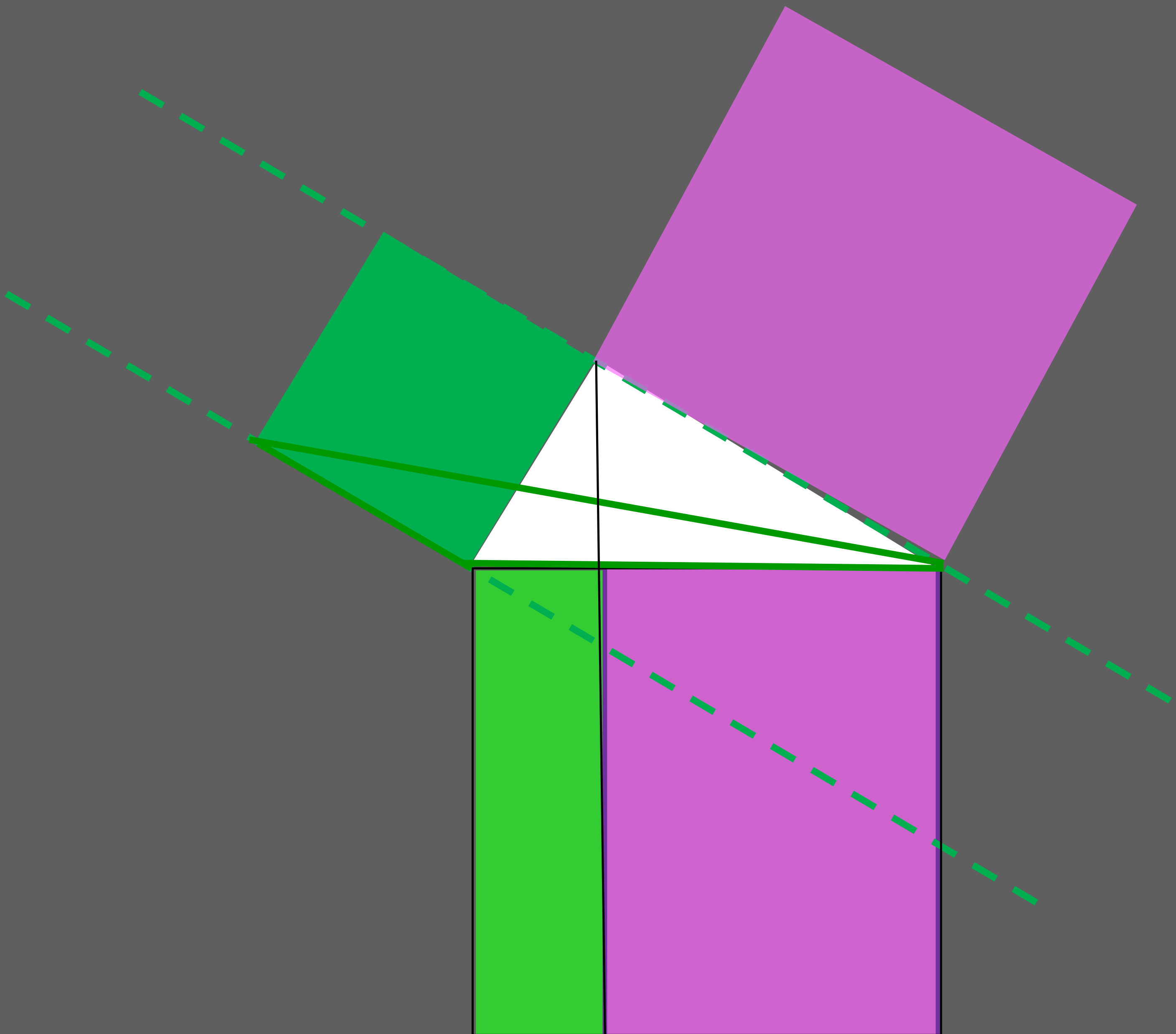
Osserviamo la dimostrazione di Euclide



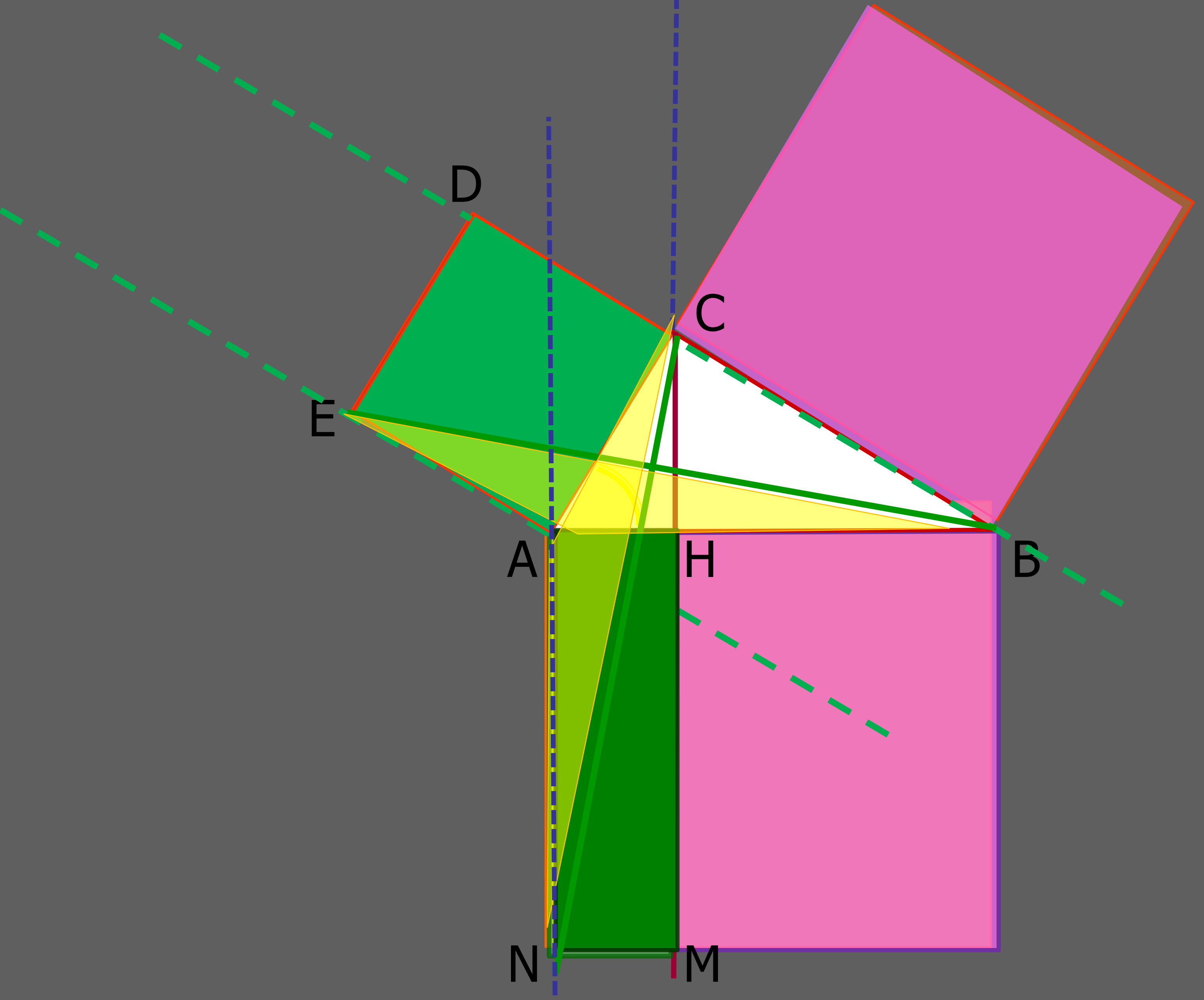
Libro I, Prop. *35*

Parallelogrammi che siano posti sulla stessa base e fra le stesse parallele sono uguali (**equiestesi**).

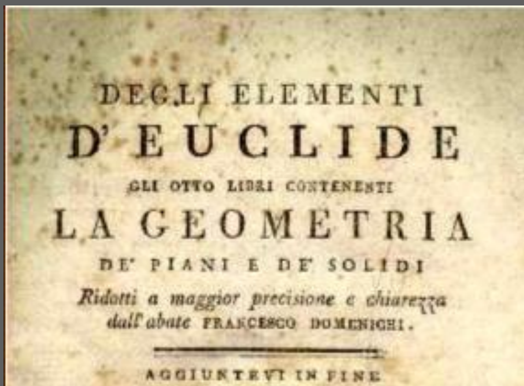
I teoremi come ‘dispositivi’ per …



La dimostrazione di Euclide

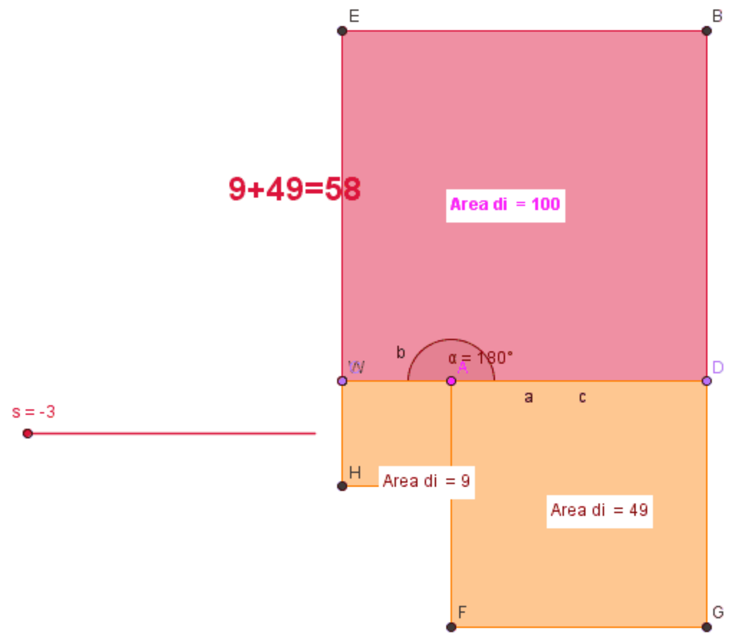


Il teorema di Pitagora (Euclide, prop. I. 47)


DEGLI ELEMENTI
D' EUCLIDE
GLI OTTO LIBRI CONTENENTI
LA GEOMETRIA
DE' PIANI E DE' SOLIDI
Ridotti a maggior precisione e chiarezza dall' abate FRANCESCO DOMENICHI.
AGGIUNTEVI IN FINE

Nei triangoli rettangoli il quadrato del lato opposto all'angolo retto è uguale alla somma dei quadrati dei lati che comprendono l'angolo retto.

E se il triangolo non è rettangolo?...



La somma dei quadrati dei lati comprendenti l'angolo ottuso è minore del quadrato sull'altro lato.

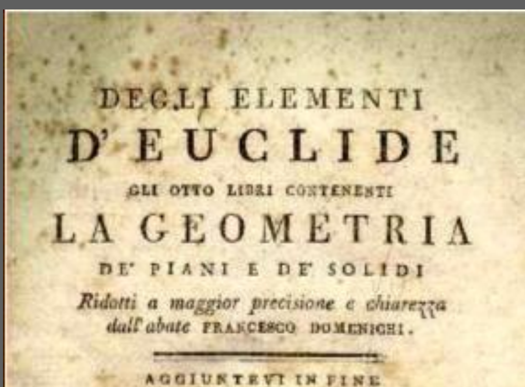
La somma dei quadrati dei lati comprendenti l'angolo acuto è maggiore del quadrato sull'altro lato.

La risposta precisa di Euclide

Angolo_ottusoCORTA.pptx

... di quanto ?

La risposta di Euclide (prop. II.12)

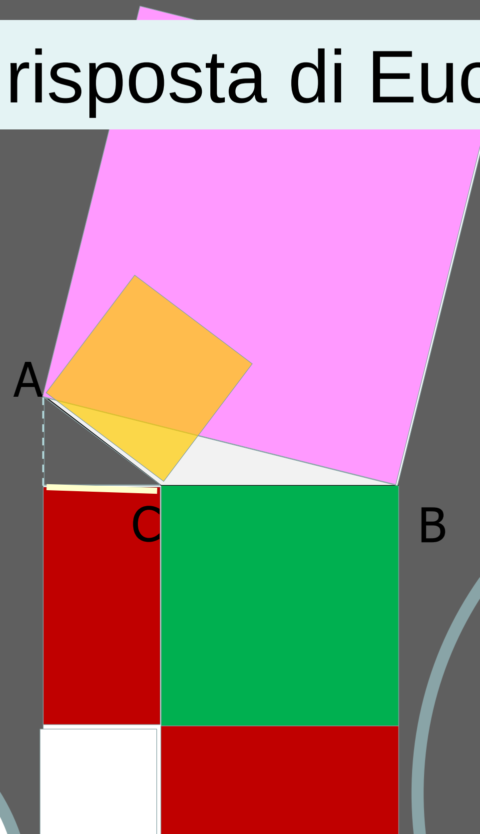


DEGLI ELEMENTI
D' EUCLIDE
GLI OTTO LIBRI CONTENENTI
LA GEOMETRIA
DE' PIANI E DE' SOLIDI
Ridotti a maggior precisione e chiarezza dall'abate FRANCESCO DOMENICHI.
AGGIUNTEVI IN FINE

Nei triangoli ottusangoli il quadrato del lato opposto all'angolo ottuso è maggiore, rispetto alla somma dei quadrati dei lati comprendenti l'angolo ottuso, del doppio del rettangolo compreso da uno dei lati che contengono l'angolo ottuso e dalla proiezione dell'altro su di esso.

... di quanto ?

La risposta di Euclide (prop. II.12)



Nei triangoli ottusangoli il quadrato del lato opposto all'angolo ottuso è maggiore, rispetto alla somma dei quadrati dei lati comprendenti l'angolo ottuso, del doppio del rettangolo compreso da uno dei lati che contengono l'angolo ottuso e dalla proiezione dell'altro su di esso.

AB = BC + AC + 2 BC,CH

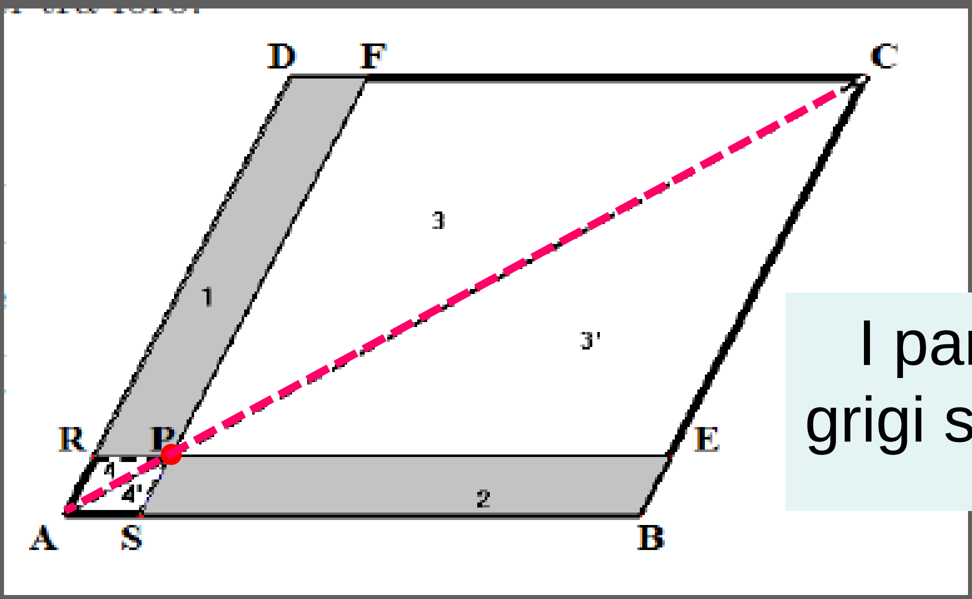
HC è ...

il «teorema del coseno»

I teoremi come ‘dispositivi’ per …

Proposizione 43, Libro I (Teorema dello Gnomone)

In ogni parallelogrammo i complementi dei parallelogrammi posti intorno alla diagonale sono uguali [equivalenti] *fra loro.*



I parallelogrammi grigi sono equiestesi

rettangoli, equazioni e proporzioni: rileggere il libro II

L’equazione di primo grado $ax = b$

$$a \cdot x = 1 \cdot b$$

può significare l’uguaglianza in estensione di due rettangoli.

Dopo aver introdotto il calcolo sui segmenti (sulle classi di equivalenza…) Hilbert…

$$Con \quad a : \mathrm{b} = c : d$$

$$si\ deve\ intendere\ ad = bc$$

D. Hilbert

Fondamenti della geometria

La proporzione esprime dunque l’uguaglianza in estensione di due rettangoli.

Proposizione 43, Libro I (Teorema dello Gnomone)

In ogni parallelogrammo i complementi dei parallelogrammi posti intorno alla diagonale sono uguali [equivalenti] *fra loro.*

Il 'dispositivo' di Euclide

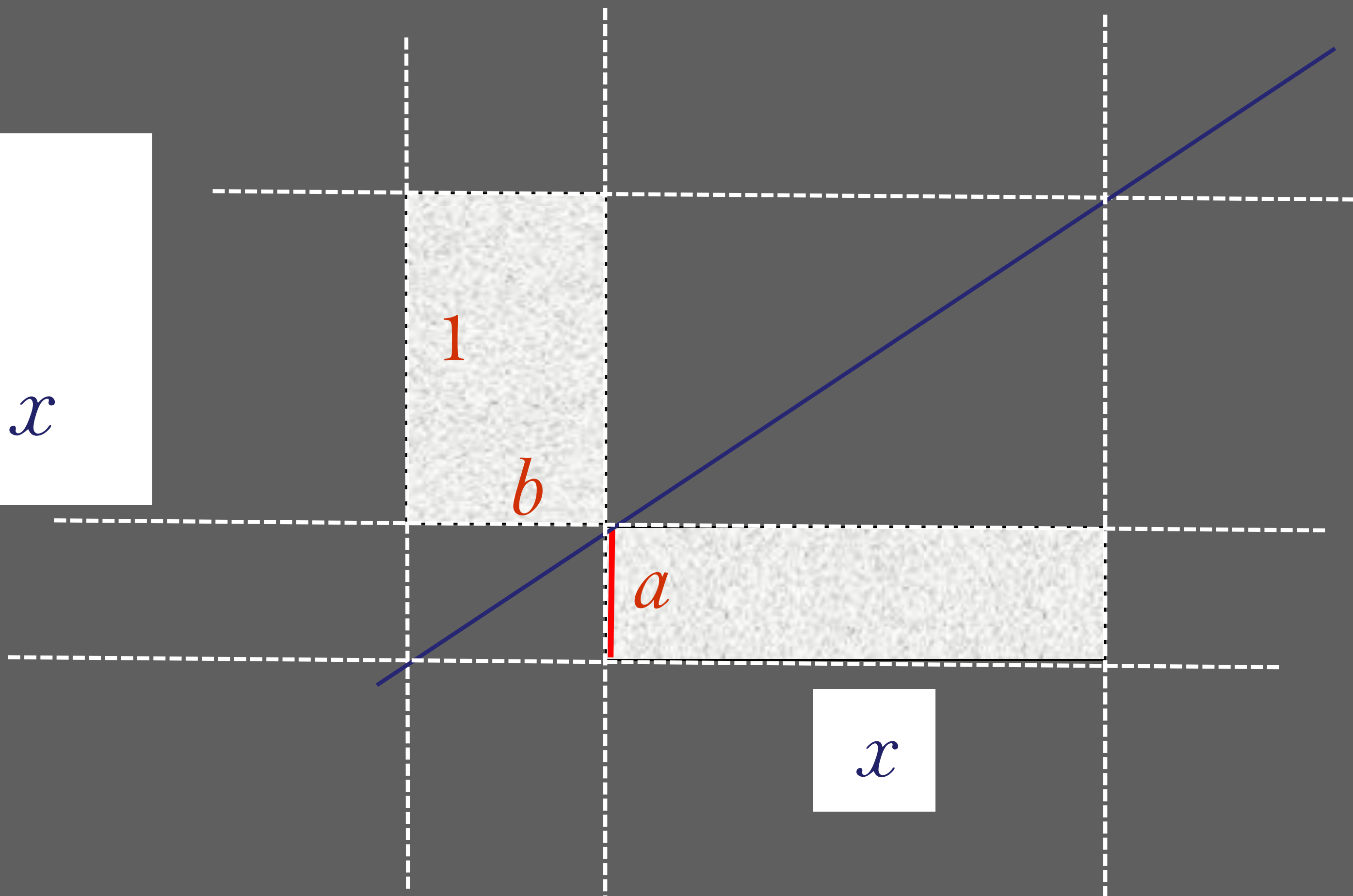
costruisce la soluzione delle equazioni di primo grado,

costruisce il 4° proporzionale.

$$a \cdot x = 1 \cdot b$$

ovvero

$$a : b = 1 : x$$



Euclide, Libro II, Prop. 5

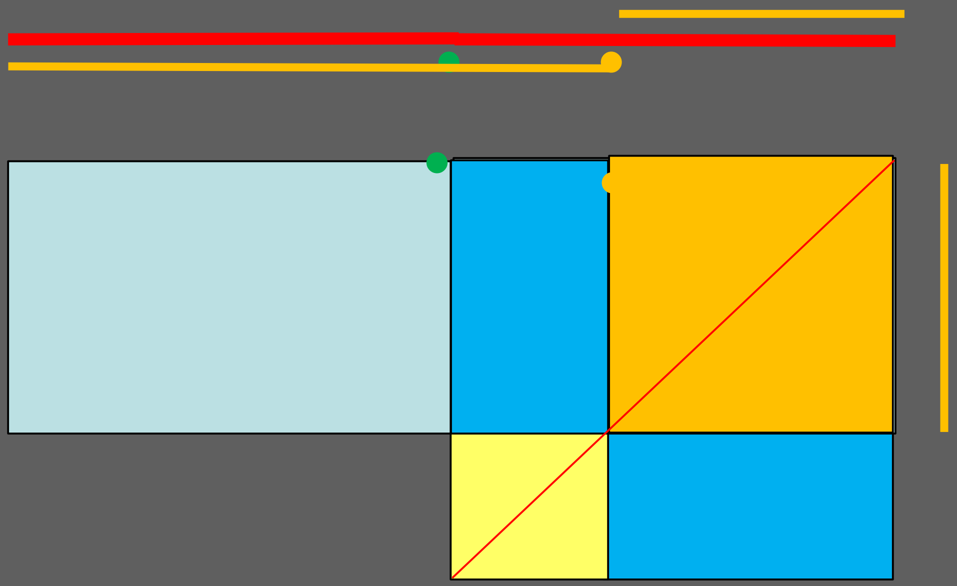
Il papiro di Oxyrhynchus

Se si divide una retta in parti uguali e disuguali, il rettangolo che ha per lati le parti disuguali insieme col quadrato della parte compresa tra i due punti di divisione è uguale (equivalente) al quadrato della metà del segmento.

Un segmento è diviso

in parti uguali

e in parti diseguali



Euclide, II, prop. 5

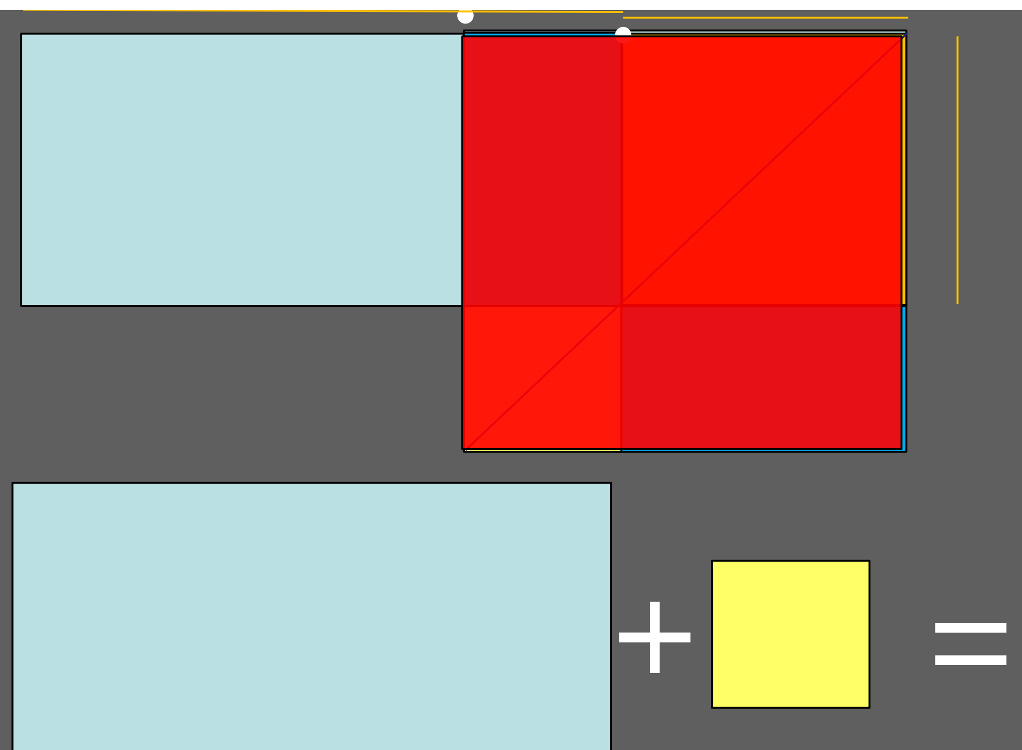
Il rettan

quadrat

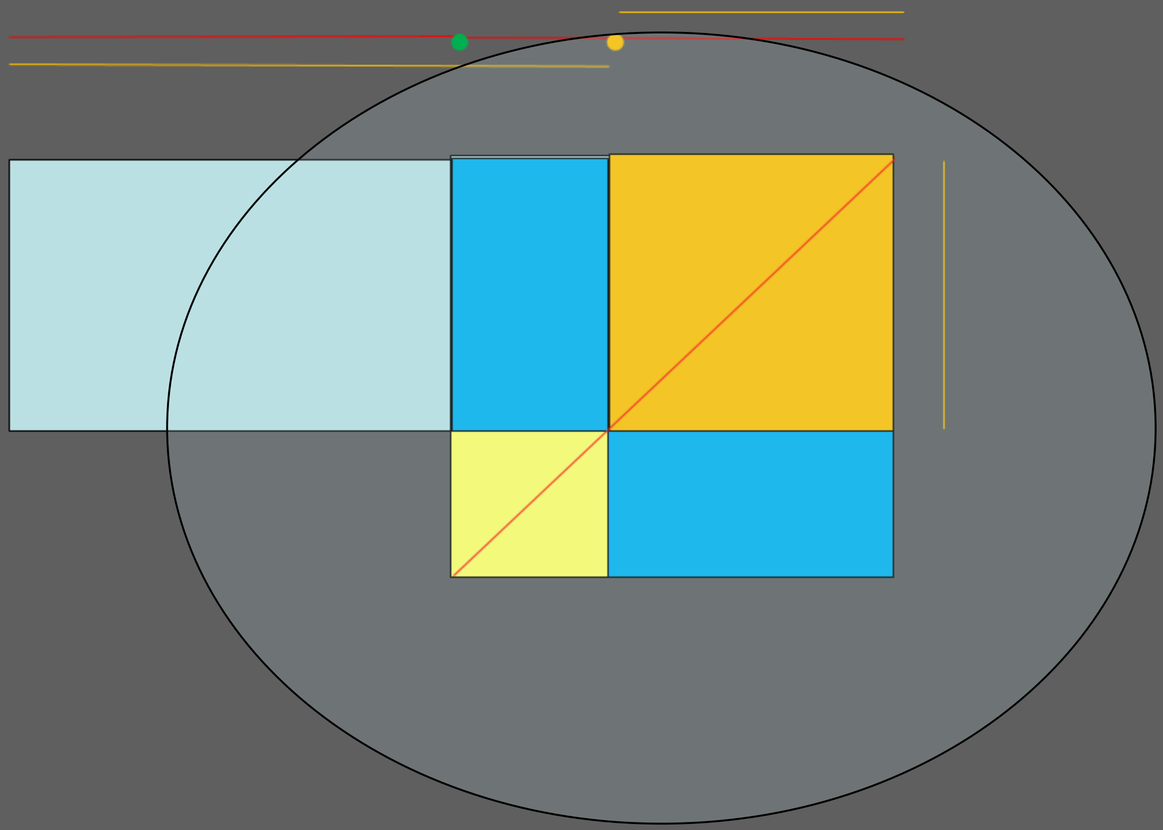
è ugual ... o.

La proposizione II.5 di Euclide risolve un problema isoperimetrico.

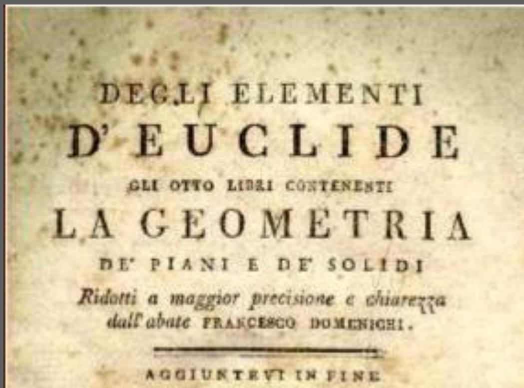
Tra i rettangoli di ugual perimetro il quadrato è quello che ha area massima.



Un segmento è diviso in parti uguali e in parti diseguali



Nella dimostrazione si usa il fatto che i due rettangoli azzurri sono equiestesi.

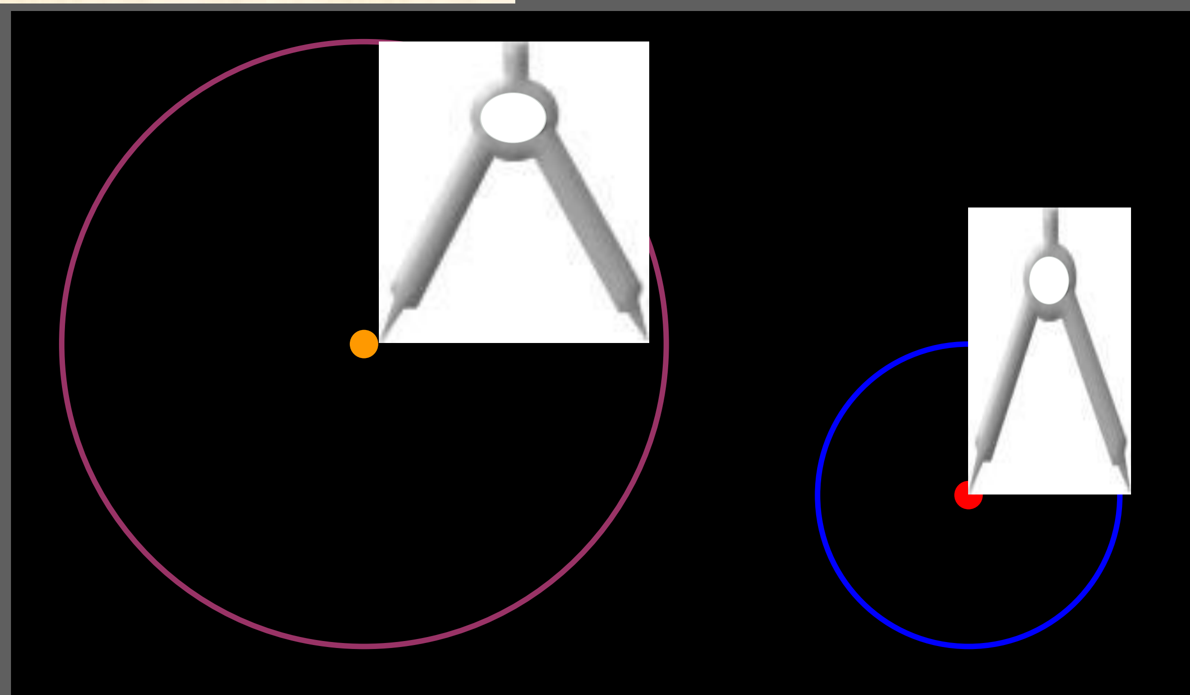

DEGLI ELEMENTI
D' EUCLIDE
GLI OTTO LIBRI CONTENENTI
LA GEOMETRIA
DE' PIANI E DE' SOLIDI
Ridotti a maggior precisione e chiarezza
dall' abate FRANCESCO DOMENICHI.
AGGIUNTEVI IN FINE

Gli Elementi di Euclide, libro III

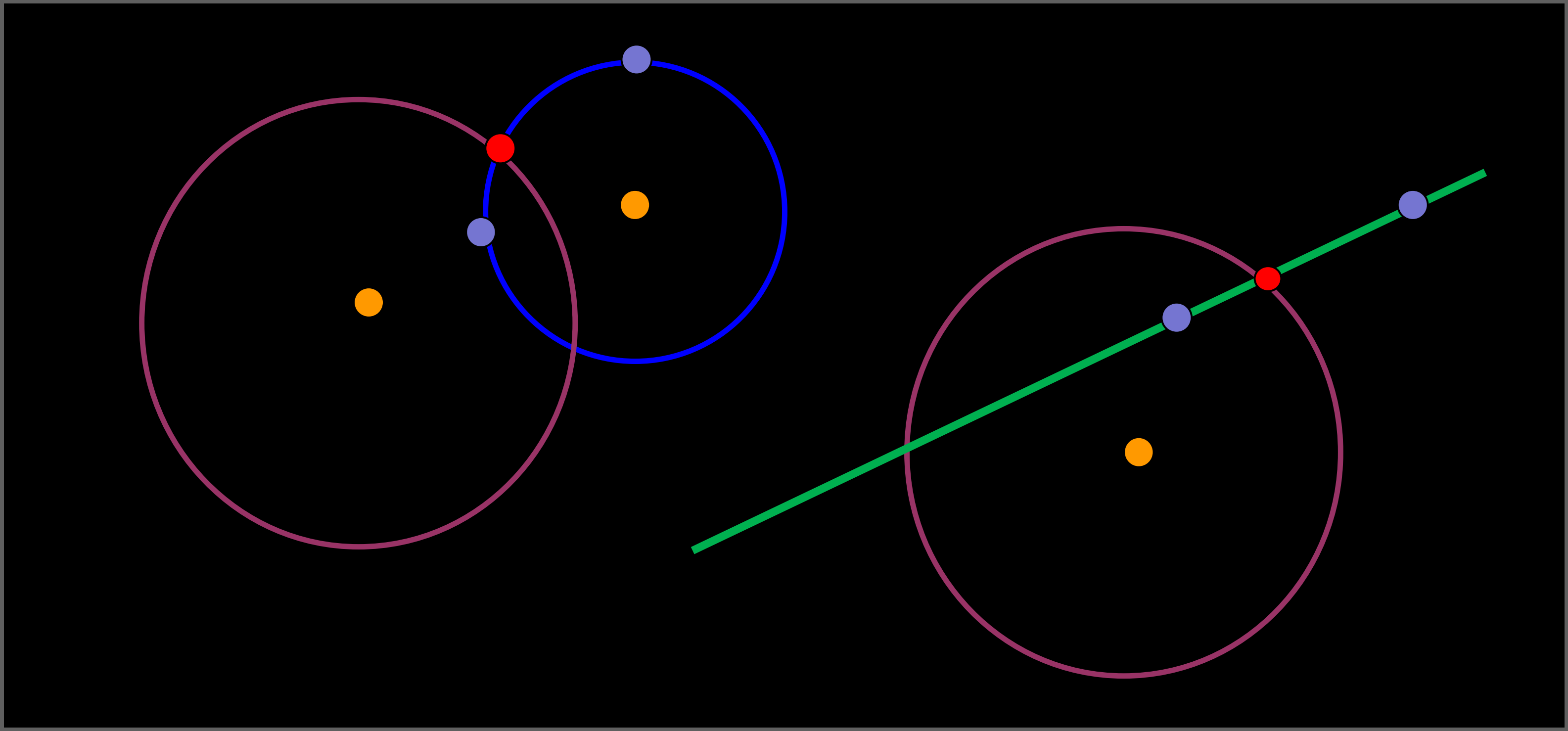
Protagonista è il cerchio (circonferenza)

Post. III - Libro I

E che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro ed ogni raggio.



Il postulato nascosto: intersezione retta circonferenza, circonferenza- circonferenza

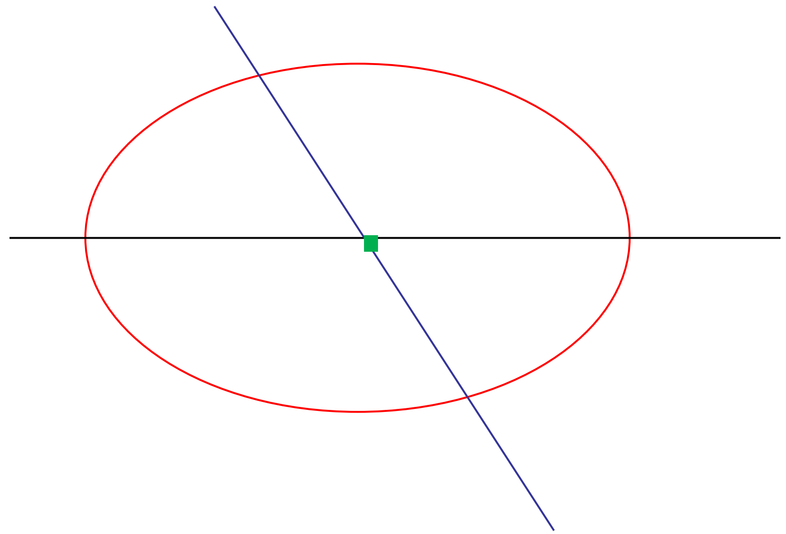


è un postulato di continuità.

cerchio

Libro I

XV Cerchio è una figura piana compresa da un'unica linea [che si chiama circonferenza] tale che tutte le rette, le quali cadano sulla linea a partire da un punto fra quelli che giacciano internamente alla figura, sono fra loro uguali.



XVI Quel punto si chiama centro del cerchio.
XVII Diametro del cerchio è una retta condotta per il centro e terminata da ambedue le parti dalla circonferenza del cerchio, la quale retta taglia anche il cerchio per metà.

cerchio

sfera

Definizione XV, Libro I

Cerchio è una figura piana compresa da un'unica linea [che si chiama circonferenza] tale che tutte le rette, le quali cadano sulla linea a partire da un punto fra quelli che giacciano internamente alla figura, sono fra loro uguali.

Definizione XIV, Libro XI

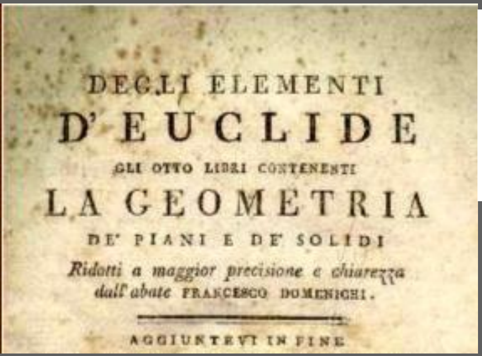
Sfera è la figura che viene compresa quando, restando immobile il diametro di un semicerchio, si faccia ruotare il semicerchio intorno al diametro, finché non ritorni nuovamente nella stessa posizione da cui si cominciò a farlo muovere.

XVI e XVII Quel punto si chiama centro del cerchio. Diametro del cerchio è una retta condotta per il centro e terminata da ambedue le parti dalla circonferenza del cerchio, la quale retta taglia anche il cerchio per metà.

Trova il centro del dipinto!

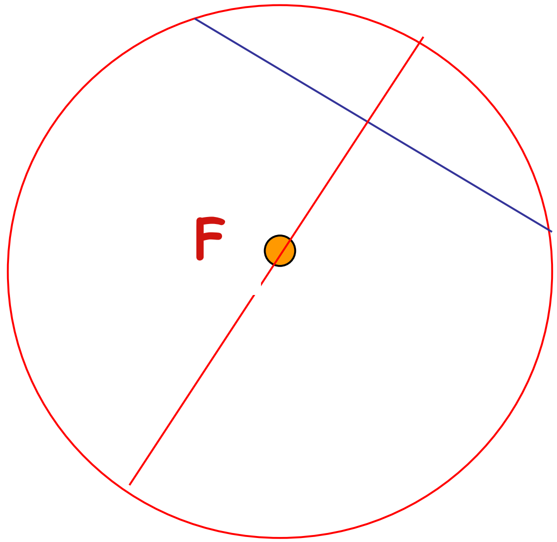
Euclide, Libro III, Prop. 1

Trova il centro del dipinto!


DEGLI ELEMENTI
D' EUCLIDE
GLI OTTO LIBRI CONTENENTI
LA GEOMETRIA
DE' PIANI E DE' SOLIDI
Ridotti a maggior precisione e chiarezza
dall'abate FRANCESCO DOMENICHI.
AGGIUNTEVI IN FINE

Euclide, Libro III, Prop. 1

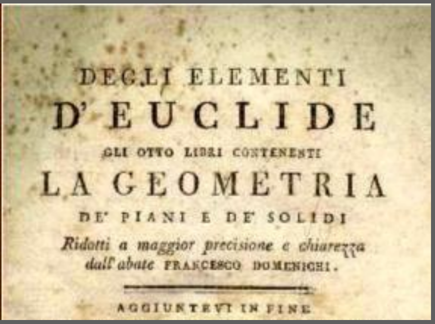
Considera una **corda qualsiasi**, ne costruisce l'asse. L'asse determina una **nuova corda** di cui costruisce il **punto medio** …



… Dico che F è il centro del cerchio. Infatti, supponiamo che non lo sia …

Corollario

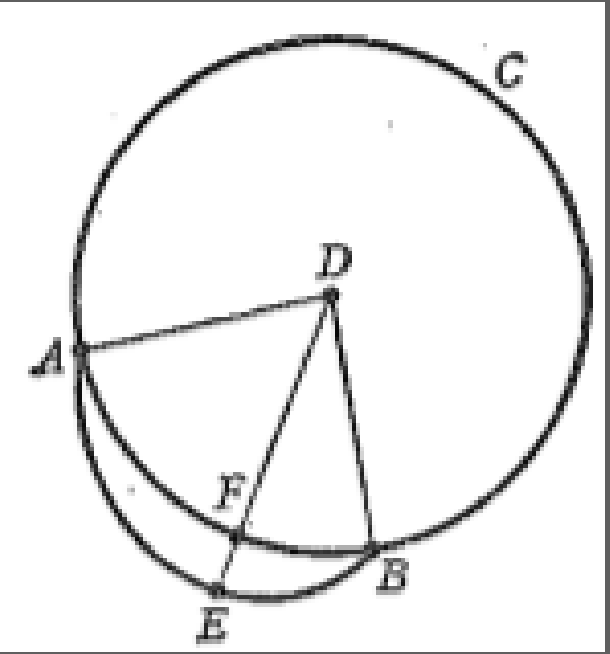
È da ciò evidente che il centro di un cerchio si trova sulla retta perpendicolare ad una corda qualsiasi nel suo punto medio.

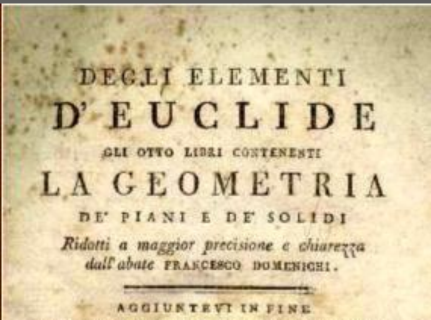


Euclide, Libro III

La convessità del cerchio

Prop. 2
Se in un cerchio si prendono sulla circonferenza due punti a piacere, la retta che congiunge i punti cadrà internamente al cerchio.



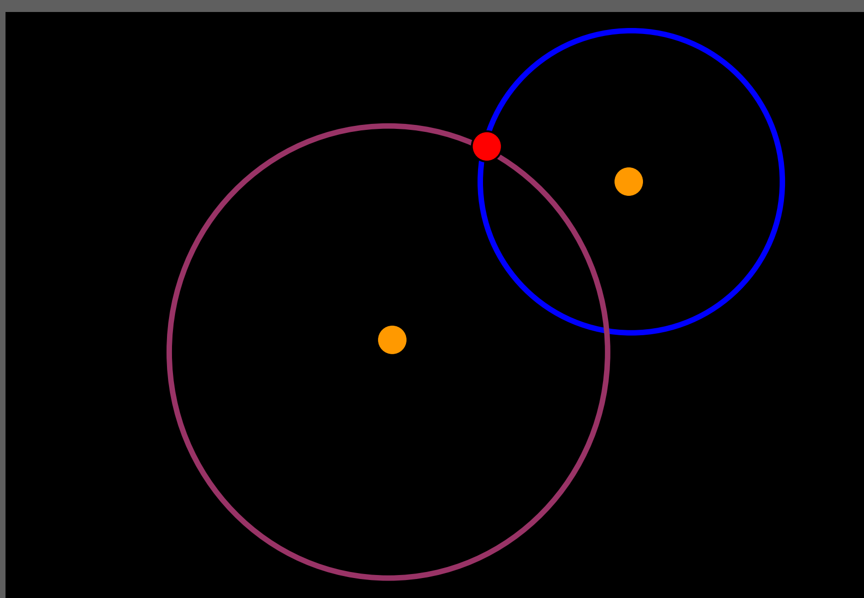


DEGLI ELEMENTI
D' EUCLIDE
GLI OTTO LIBRI CONTENENTI
LA GEOMETRIA
DE' PIANI E DE' SOLIDI
Ridotti a maggior precisione e chiarezza
dall'abate FRANCESCO DOMENICHI.
AGGIUNTEVI IN FINE

Euclide, Libro III

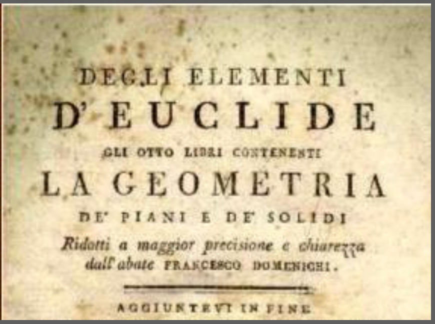
Mutue posizioni

Def. II Si dice che è tangente a un cerchio una retta, la quale raggiunge il cerchio e, prolungata, non la taglia.
Def. III Si dicono tangenti fra loro due cerchi i quali si raggiungono e non si tagliano scambievolmente.



Prop. 5 Se due cerchi si tagliano fra loro, essi non avranno lo stesso centro.

Prop. 6 Se due cerchi sono tangenti fra loro, essi non avranno lo stesso centro.



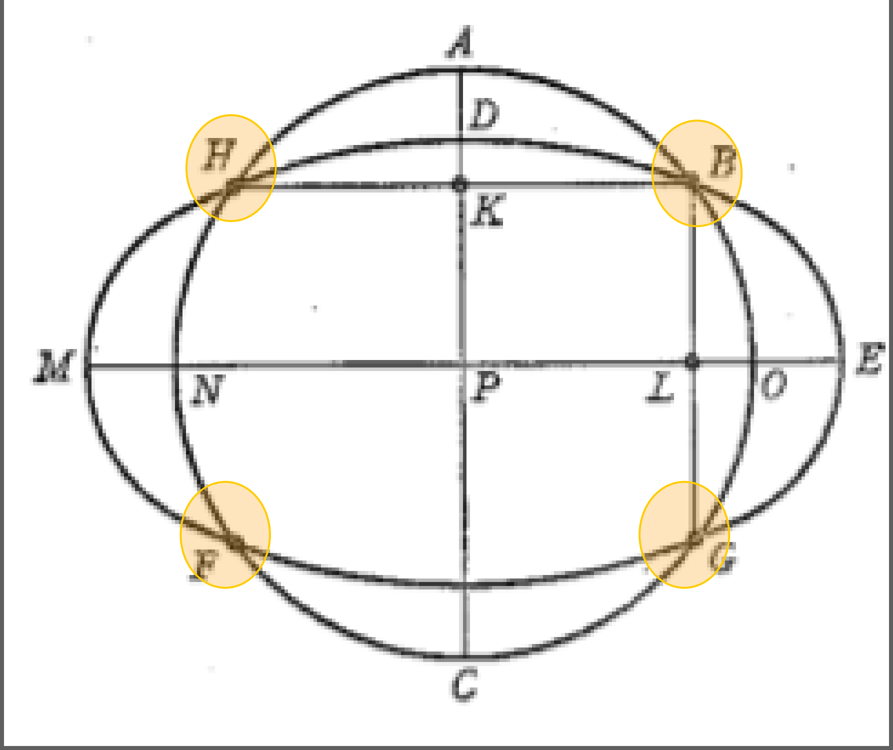
Euclide, Libro III

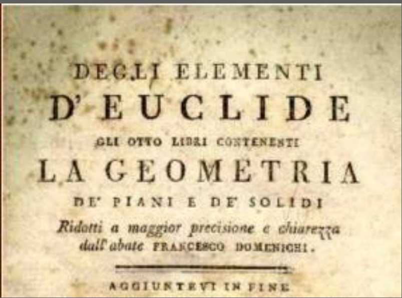
Sul numero delle intersezioni

Prop. 10

Un cerchio non taglia un altro cerchio in più di due punti.

Infatti, se fosse possibile, il cerchio *ABC* tagli un altro cerchio in più di due punti, cioè in *B*, *G*, *F*, *H*, …

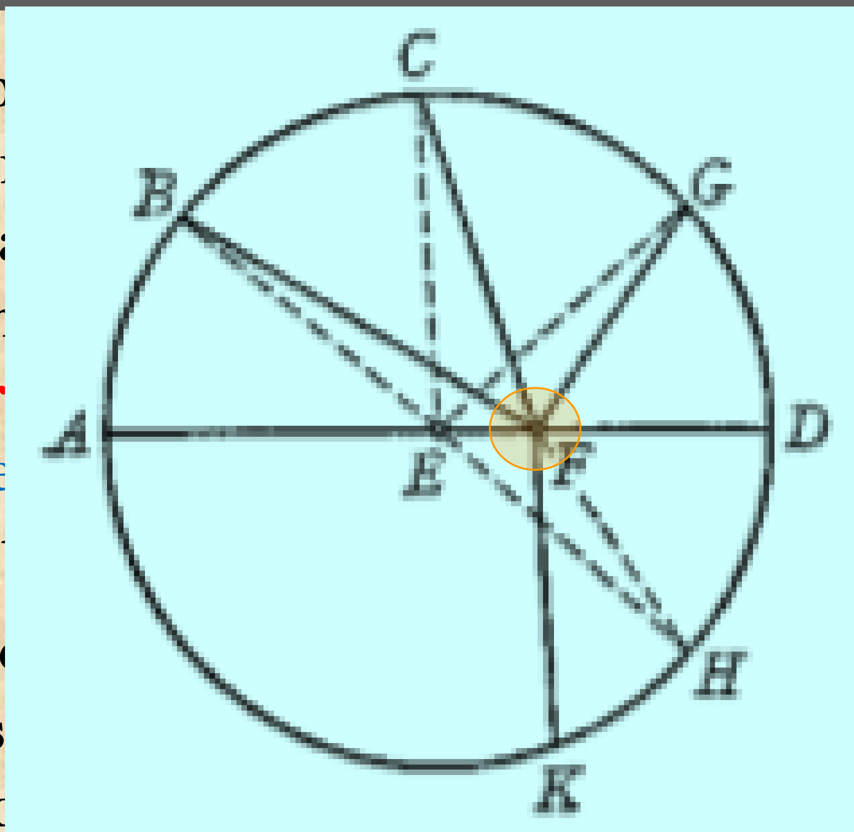



DEGLI ELEMENTI
D'EUCLIDE
GLI OTTO LIBRI CONTENENTI
LA GEOMETRIA
DE' PIANI E DE' SOLIDI
Ridotti a maggior precisione e chiarezza
dall'abate FRANCESCO DOMENICHI.
AGGIUNTEVI IN FINE

Euclide, Libro III

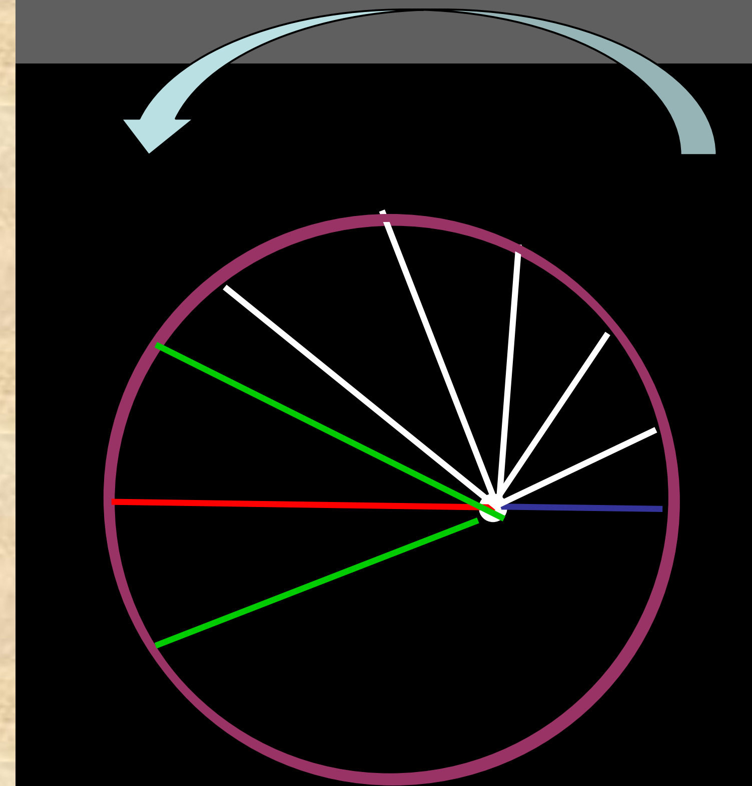
maggiore-minore, massimo- minimo

Pro … sul
dia … ntro,
ed … al
pun … ssima
la r
que
sott



e d … a che
pas … iore
di c

e dal punto potranno condursi alla circonferenza soltanto due rette uguali.

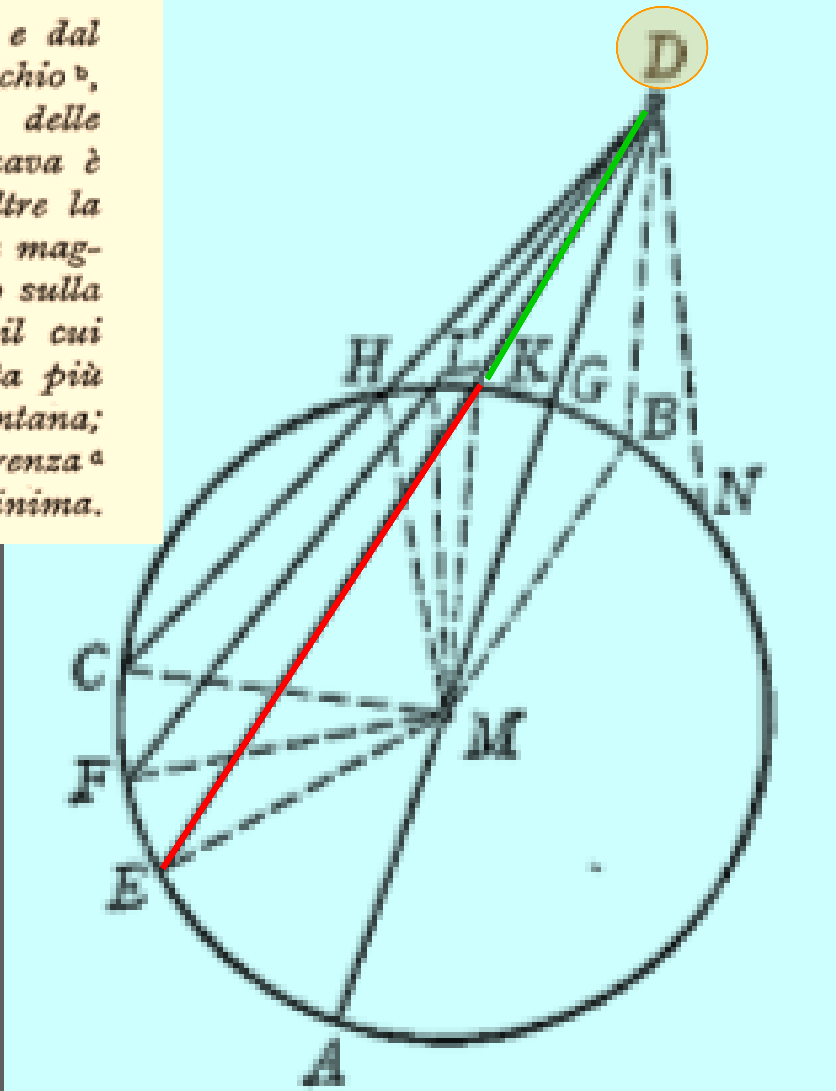


e quando il punto è esterno al cerchio …

maggiore-minore, massimo- minimo

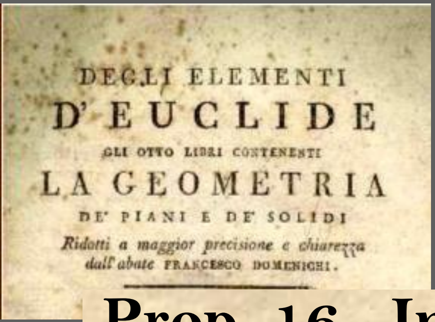
PROPOSIZIONE 8.

Se si prende un punto esternamente ad un cerchio, e dal punto si conducono linee rette alla circonferenza del cerchio[b]*, di cui una per il centro e le altre condotte a caso, delle rette che cadono sulla circonferenza [dalla parte] concava è massima quella che passa per il centro, mentre delle altre la retta più vicina a quella che passa per il centro è sempre maggiore di quella più lontana; delle rette, invece, che cadono sulla circonferenza [dalla parte] convessa è minima quella il cui prolungamento è il diametro*[e]*, mentre delle altre la retta più vicina a quella minima è sempre minore di quella più lontana; e [dal punto dato] si potranno condurre alla circonferenza*[a] *soltanto due rette uguali, una da ciascun lato della retta minima.*



I segmenti di una secante

dalla parte concava …
dalla parte convessa …



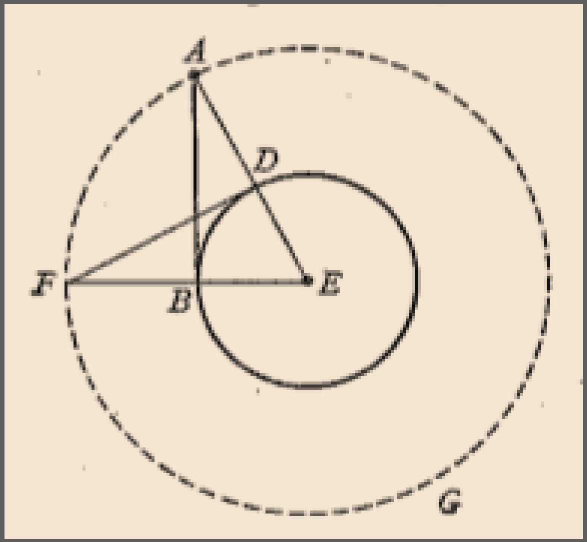
Euclide, Libro III

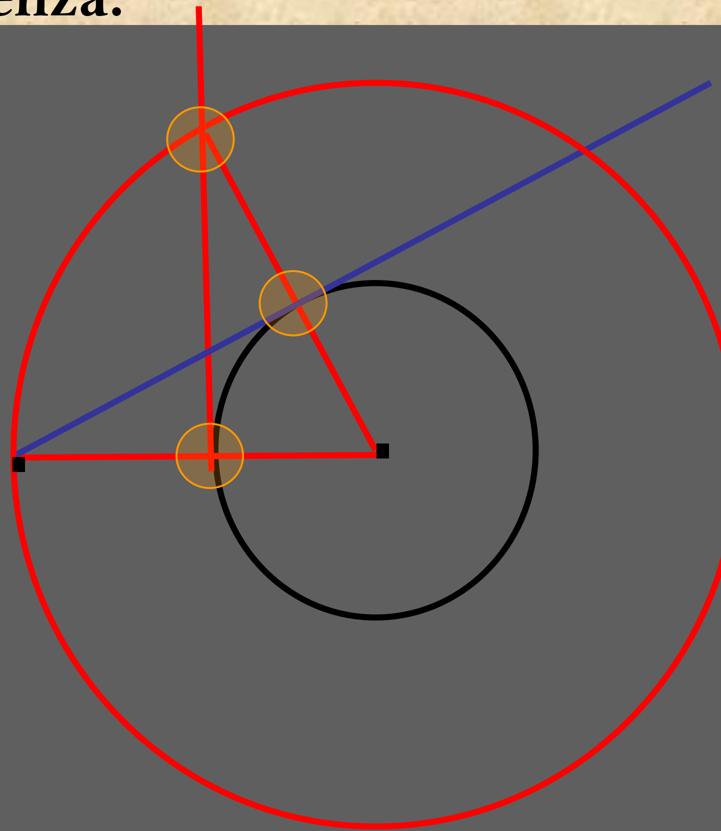
La costruzione della retta tangente …

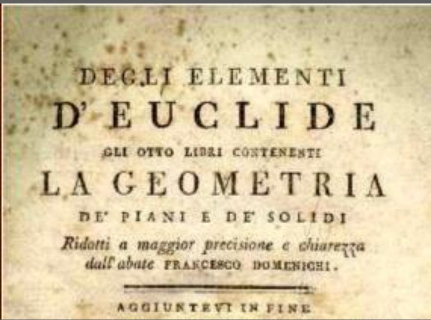
Prop. 16 In un cerchio, una retta che sia tracciata …

(costruzione della retta tangente a una circonferenza in un suo punto)

Prop. 17 Condurre da un punto dato una linea retta che sia tangente alla circonferenza.

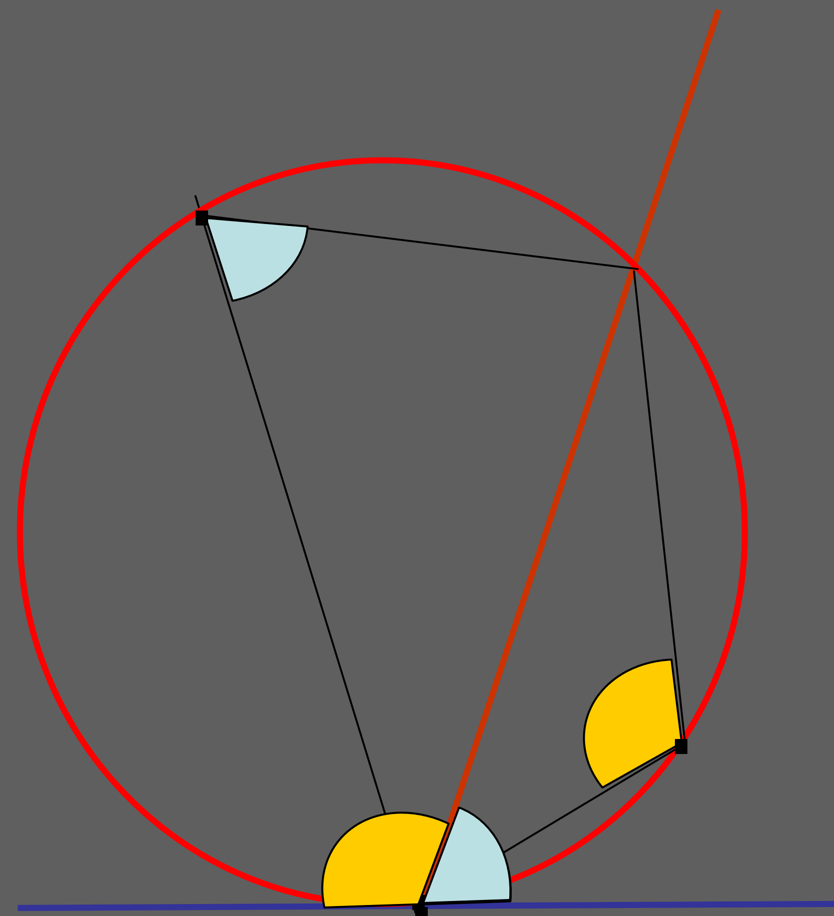


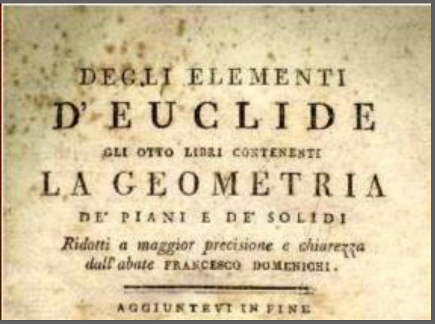



DEGLI ELEMENTI
D' EUCLIDE
GLI OTTO LIBRI CONTENENTI
LA GEOMETRIA
DE' PIANI E DE' SOLIDI
Ridotti a maggior precisione e chiarezza dall'abate FRANCESCO DOMENICHI.
AGGIUNTEVI IN FINE

Euclide, Libro III

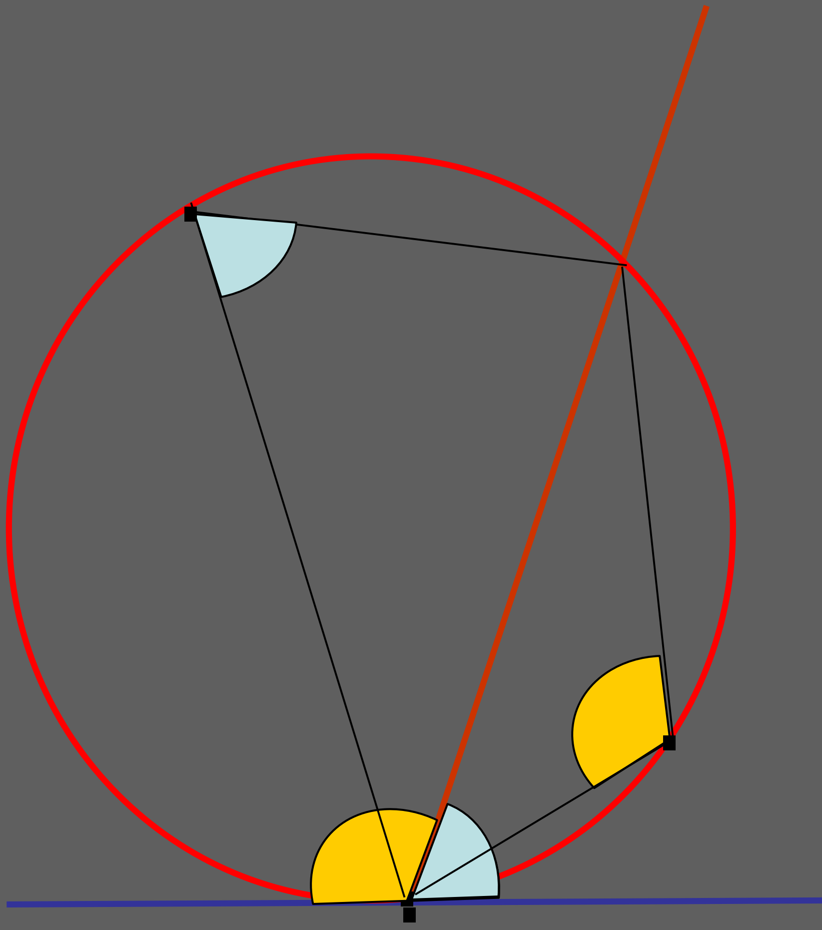
Prop. *32* Se una retta è tangente ad un cerchio, e dal punto di contatto si conduce nel cerchio un'altra retta che lo venga a tagliare,
gli angoli che essa forma con la tangente saranno uguali agli angoli alla circonferenza iscritti nei segmenti alterni del cerchio.



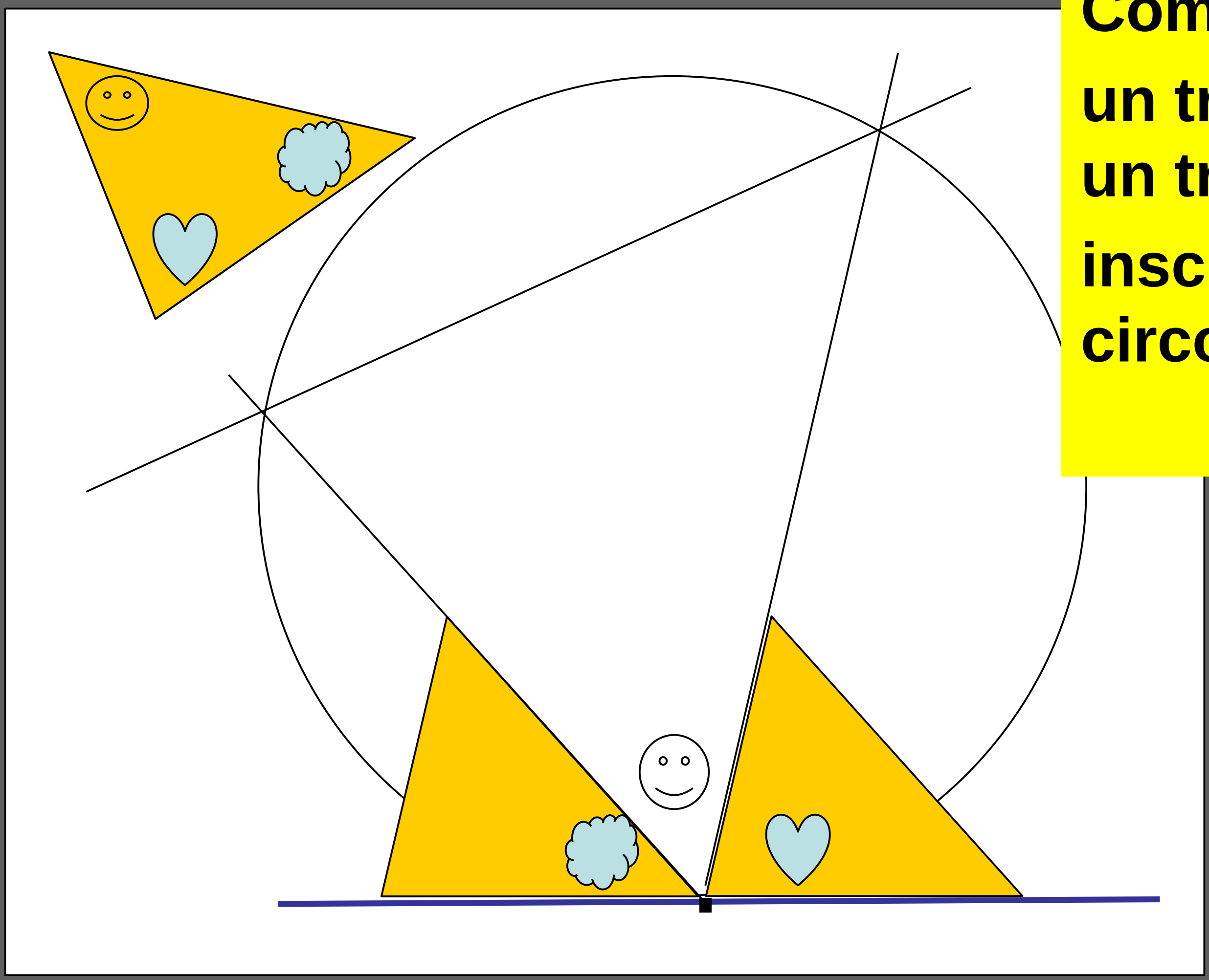

DEGLI ELEMENTI
D'EUCLIDE
GLI OTTO LIBRI CONTENENTI
LA GEOMETRIA
DE' PIANI E DE' SOLIDI
Ridotti a maggior precisione e chiarezza dall'abate FRANCESCO DOMENICHI.
AGGIUNTEVI IN FINE

Euclide, Libro III

Prop. *32* Se una retta è tangente ad un cerchio, e dal punto di contatto si conduce nel cerchio un'altra retta che lo venga a tagliare,
gli angoli che essa forma con la tangente saranno uguali agli angoli alla circonferenza iscritti nei segmenti alterni del cerchio.



I teoremi come ‘dispositivi’ per …

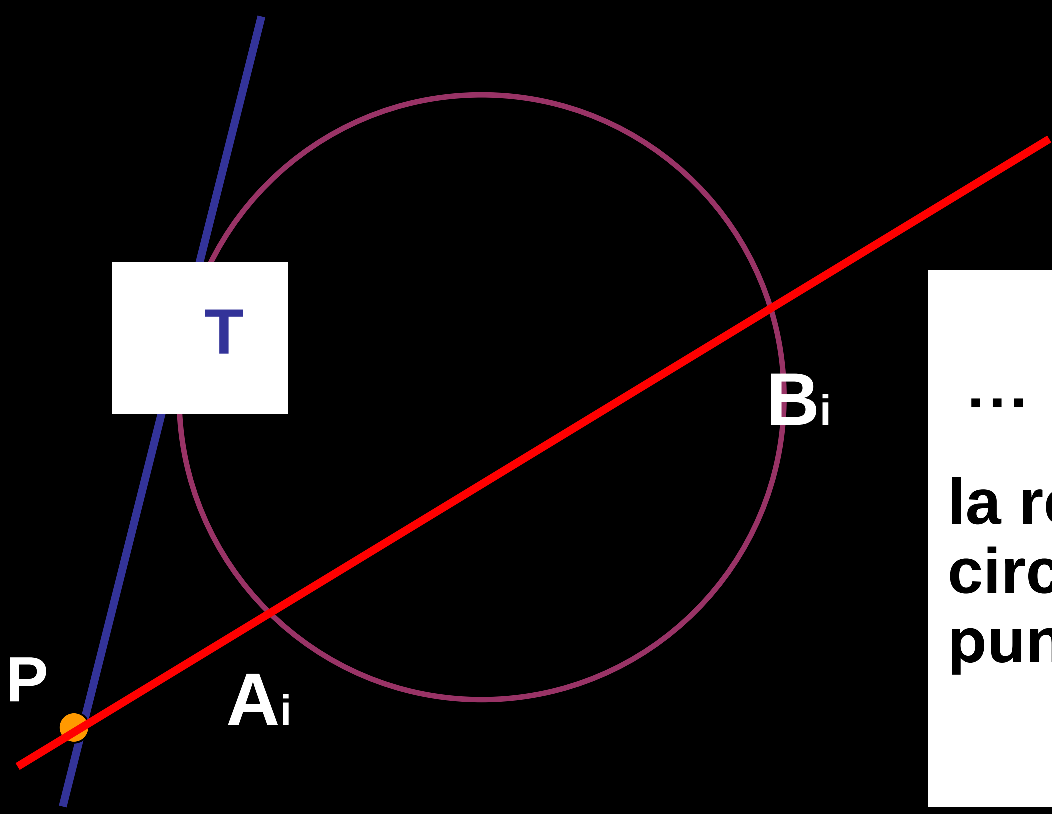


Come costruire

un triangolo simile a un triangolo dato inscritto in una circonferenza data.

… l'ultimo teorema del libro III (prop. 37)

Prop. 37 Se da un punto preso esternamente si conducono ad un cerchio due rette, una delle quali tagli il cerchio, mentre l'altra abbia un estremo sulla sua circonferenza, e se …

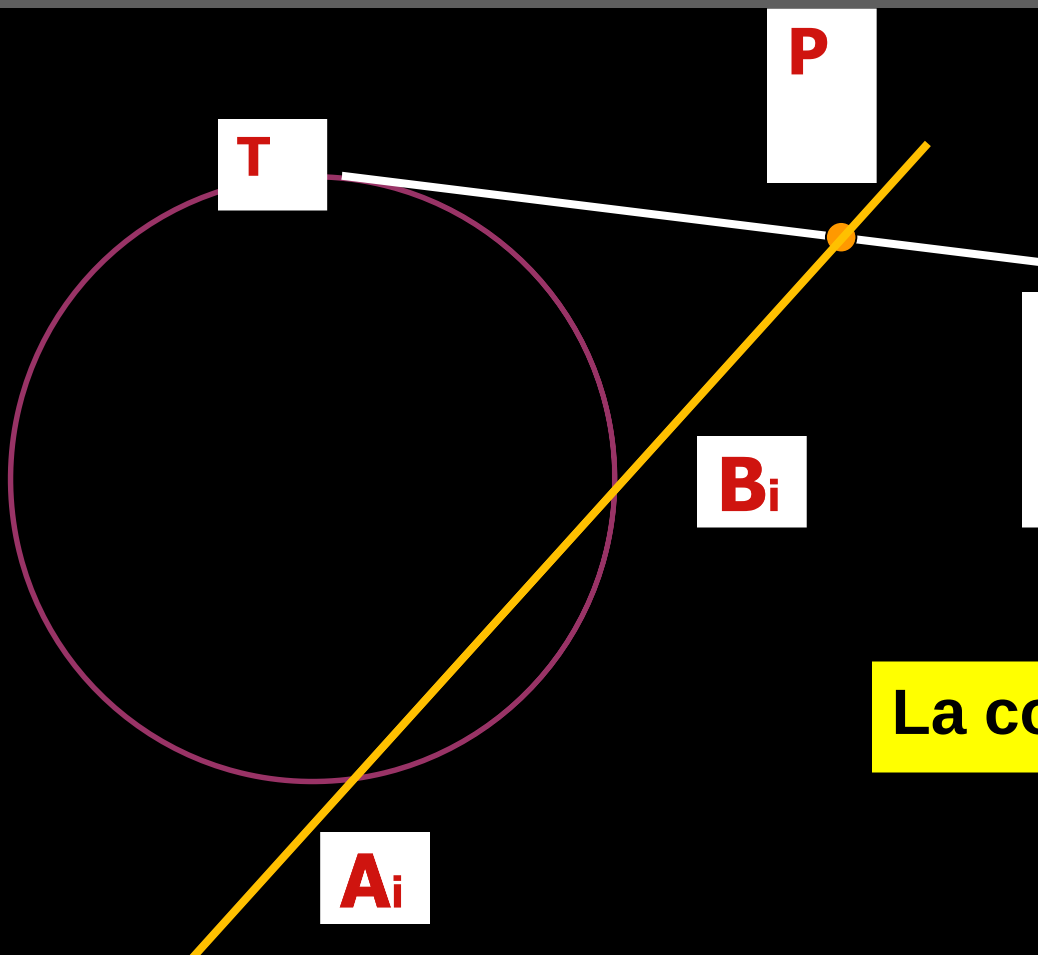


Un criterio di tangenza

… □ (TP) = □ (AiP, BiP)

la retta per TP è tangente alla circonferenza (T è l'unico punto di intersezione di …)

Prop. 36 Se da un punto preso esternamente si conducono ad un cerchio due rette, una delle quali tagli il cerchio, mentre l'altra sia ad esso tangente, il rettangolo …



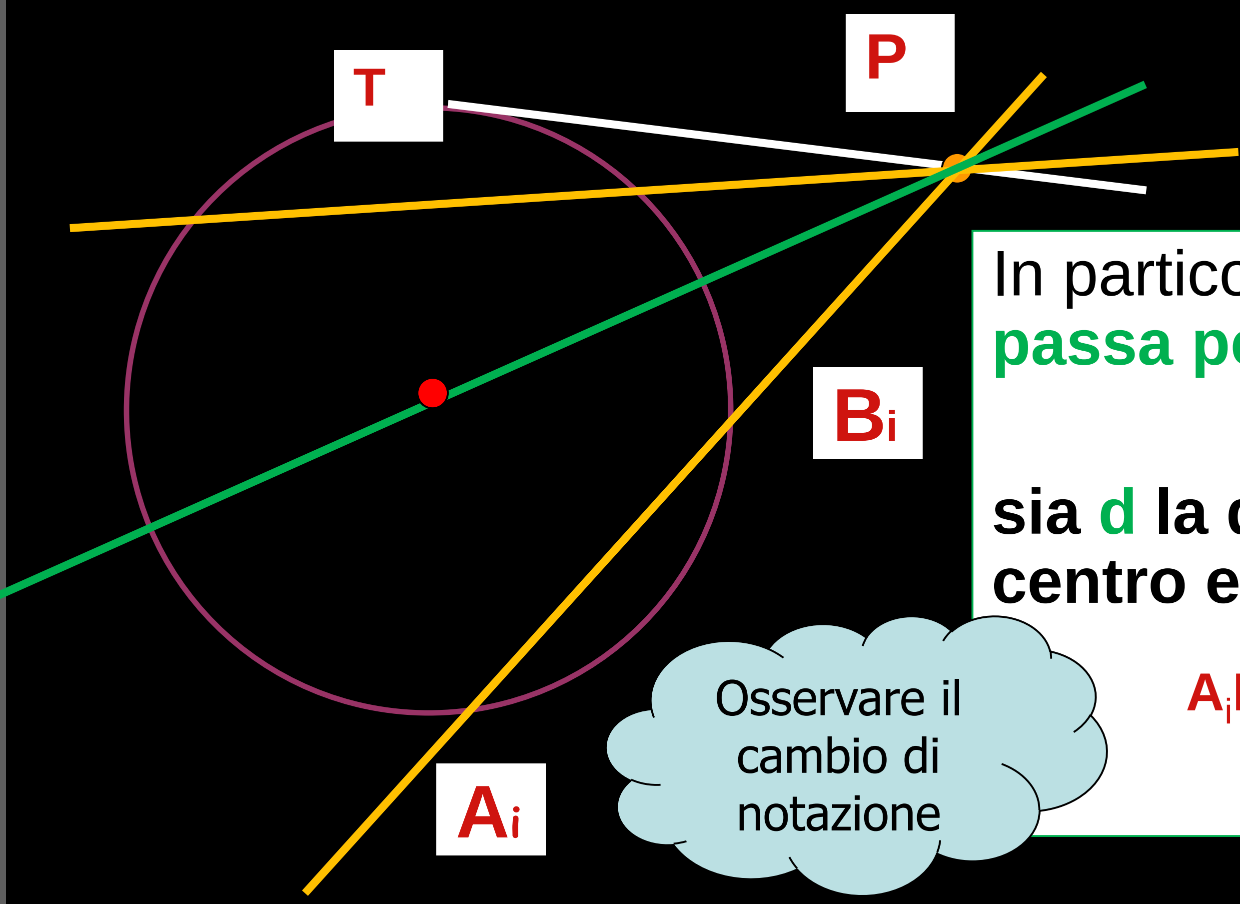
$\square\,(TP) = \square\,(A_iP, B_iP)$

La condizione necessaria

Euclide Libro III, prop. 36

L' invariante

Data una circonferenza e dato un punto P esternamente ad essa, al variare della secante per P non varia l'estensione del rettangolo composto dall'intero segmento di secante e dalla parte esterna di tale segmento.



In particolare, **se la secante passa per il centro** …

sia d la distanza di P dal centro e r il raggio, si ha:

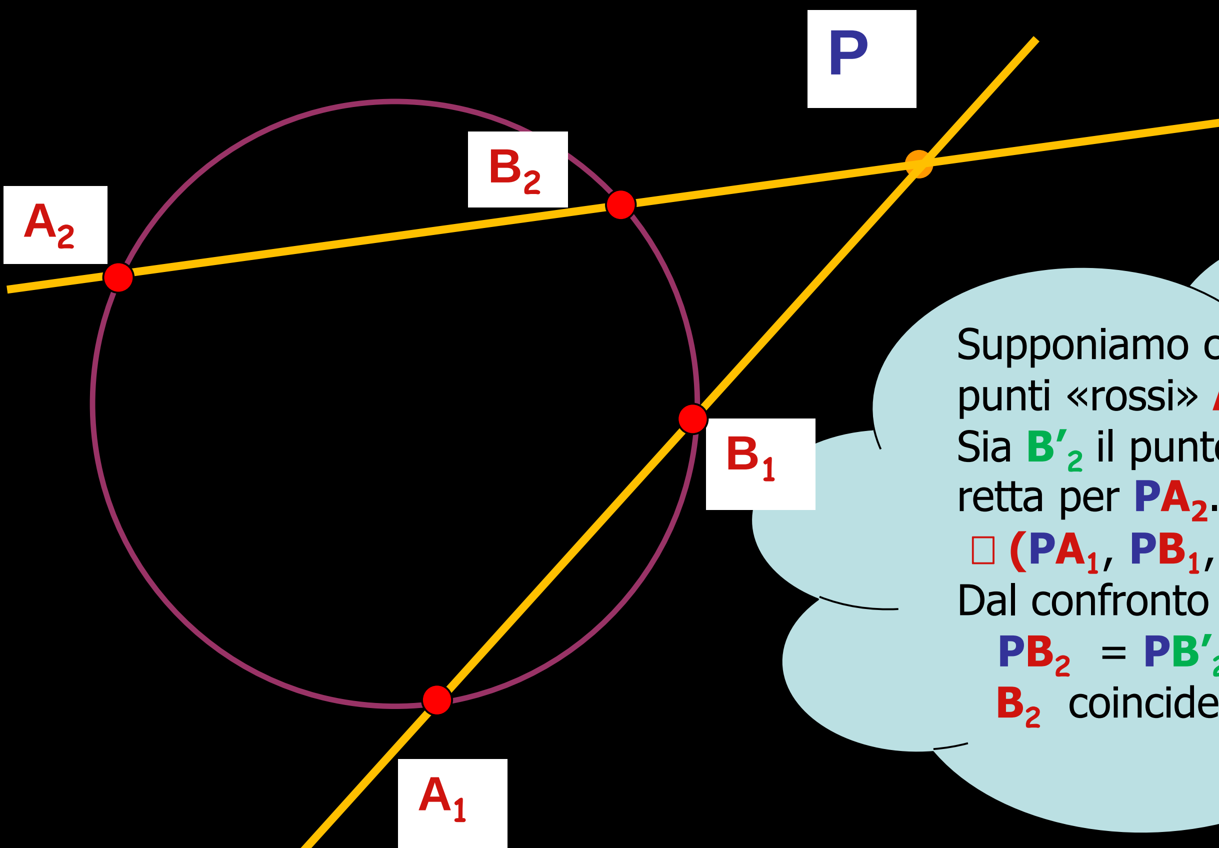
$$A_iP \cdot B_iP = d^2 - r^2$$

Euclide Libro III, prop. 36

Un criterio di conciclicità

Sono dati 4 punti: A_1, B_1, A_2, B_2 . Le rette per A_1B_1 e A_2B_2 si intersecano in **P**. Se □ (PA_1, PB_1,) = □ (PA_2, PB_2)

A_1, B_1, A_2, B_2 sono conciclici !



Supponiamo che la circonferenza per i 3 punti «rossi» A_1, B_1, A_2 non contenga B_2.
Sia B'_2 il punto sulla circonferenza e sulla retta per PA_2. Da III.36 segue:
□ (PA_1, PB_1,) = □ (PA_2, PB'_2)
Dal confronto con l'ipotesi, segue che
PB_2 = PB'_2 da cui seguirà che
B_2 coincide con B'_2 .

L’ invariante

Se P è interno alla circonferenza, ancora si ha che

□ (AP,PB) eqv □ (A_iP,B_iP)

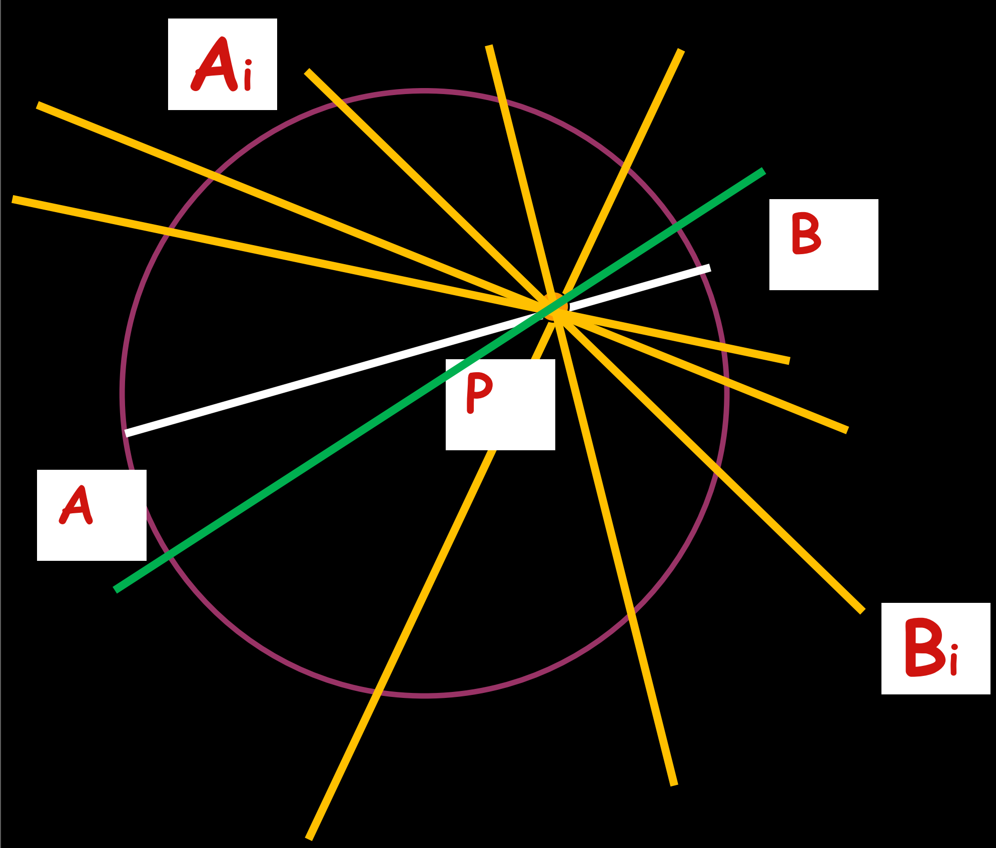
per ogni corda passante per P.

Euclide, Prop. 35

ovvero

$A_iP \cdot B_iP$ = cost

per ogni corda passante per P.

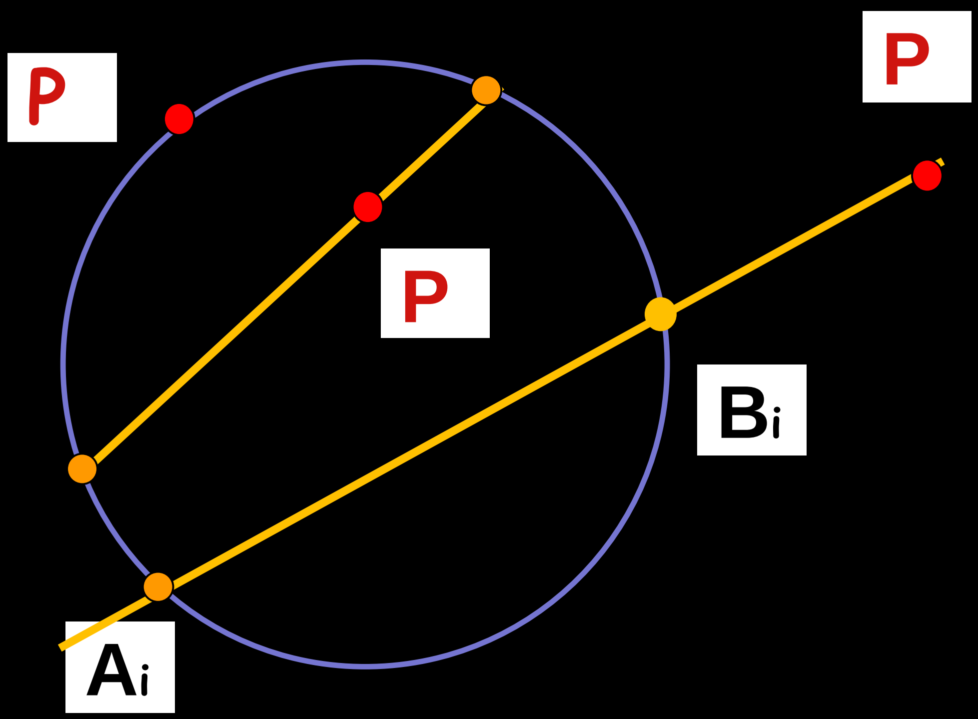


In particolare, vale per il diametro che passa per P.

L’invariante è

$$A_iP \cdot B_iP = d^2 - r^2$$

La **potenza** di un punto P rispetto a una circonferenza data $\mathcal{C}$



pot P = AiP · BiP

dove la relazione è ora riferita ai segmenti orientati di origine P

Pot P > 0 se P è esterno a $\mathcal{C}$

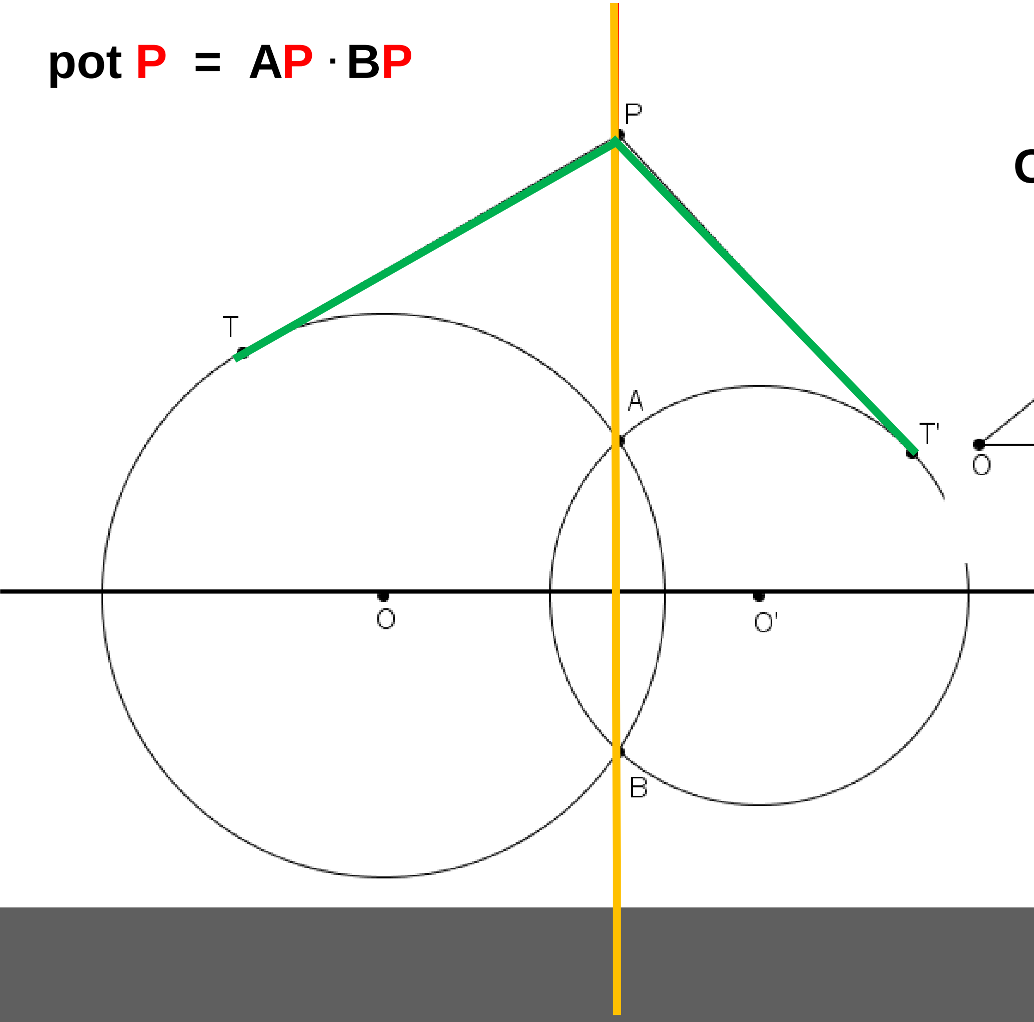
Pot P < 0 se P è interno a $\mathcal{C}$

Pot P = 0 se P appartiene a $\mathcal{C}$

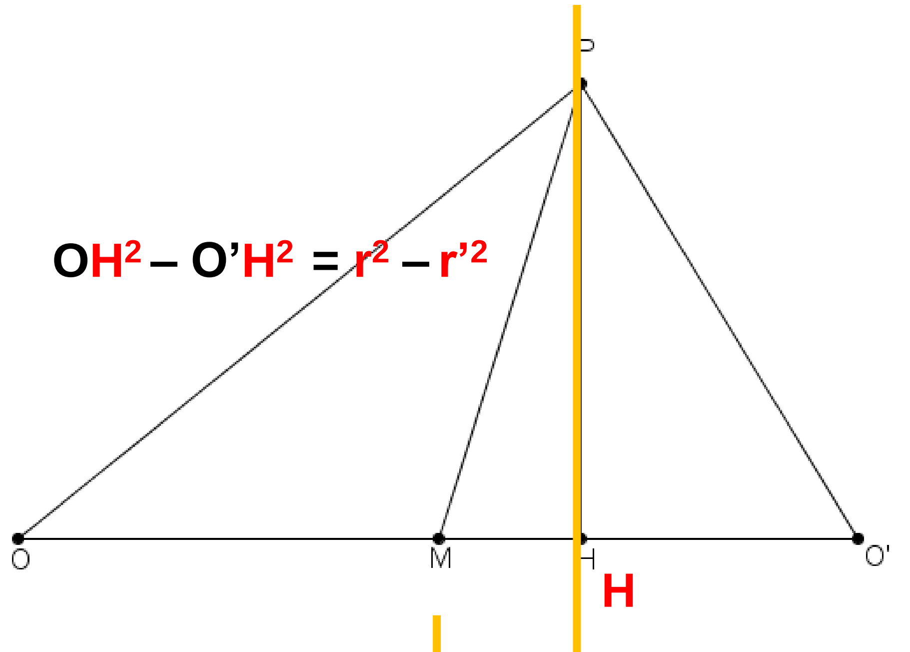
L’asse radicale

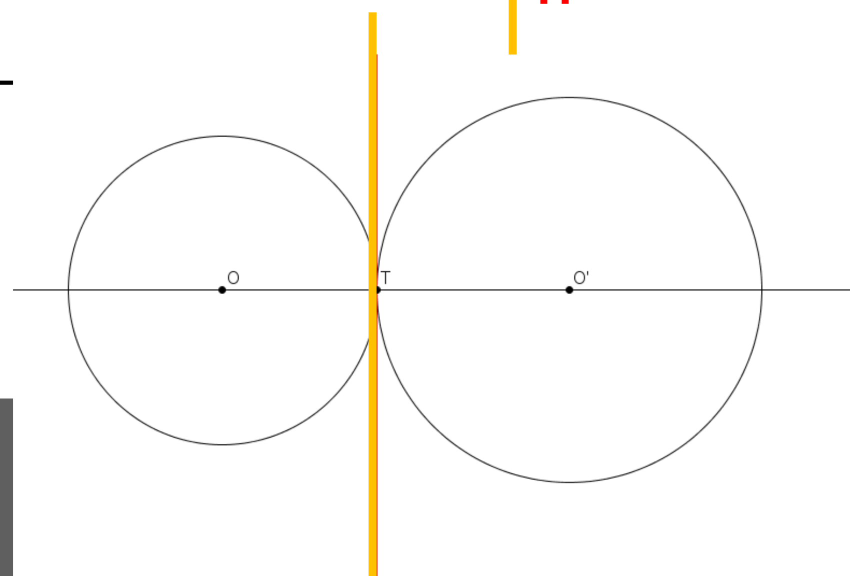
Il luogo dei punti che hanno la stessa potenza rispetto a due circonferenze date. E’ una retta ortogonale alla retta che passa per i due centri.

pot P = AP · BP



$OH^2 – O'H^2 = r^2 – r'^2$

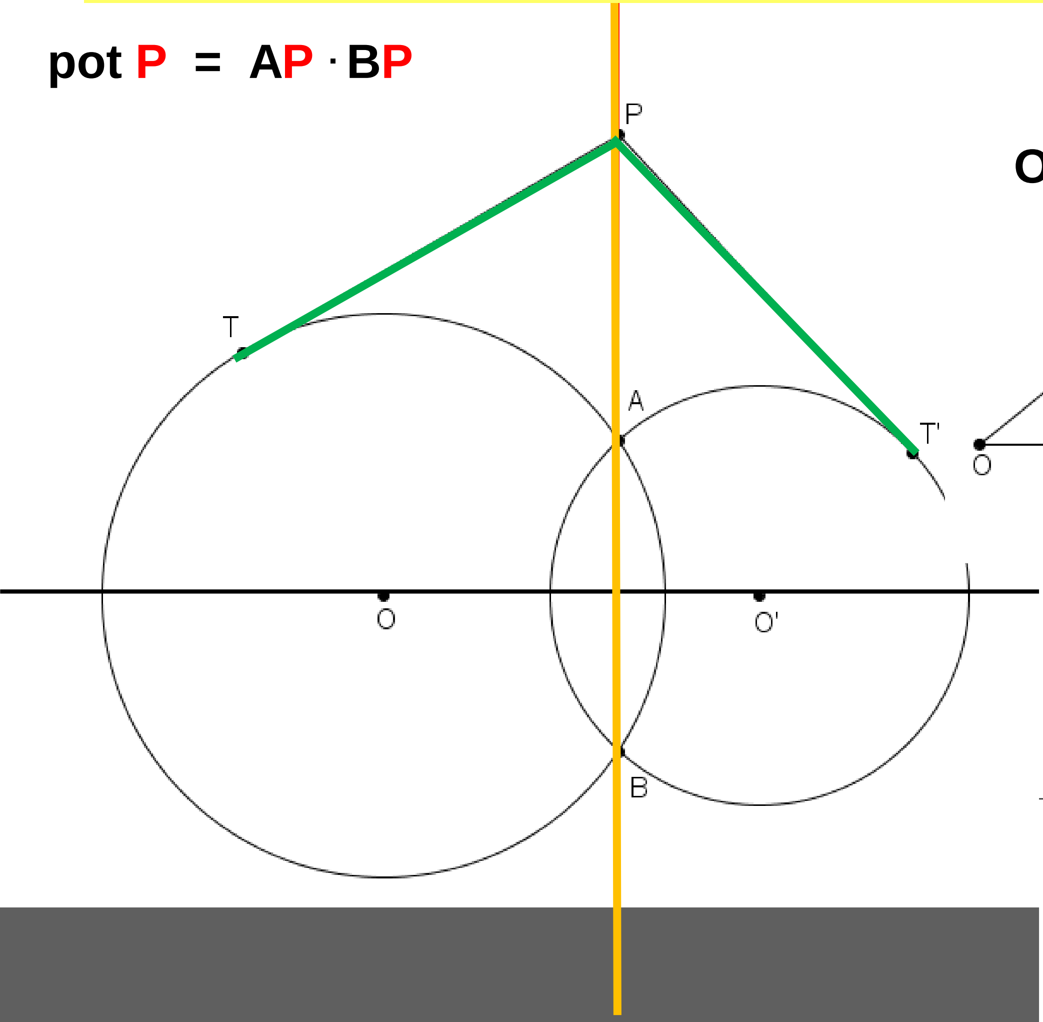




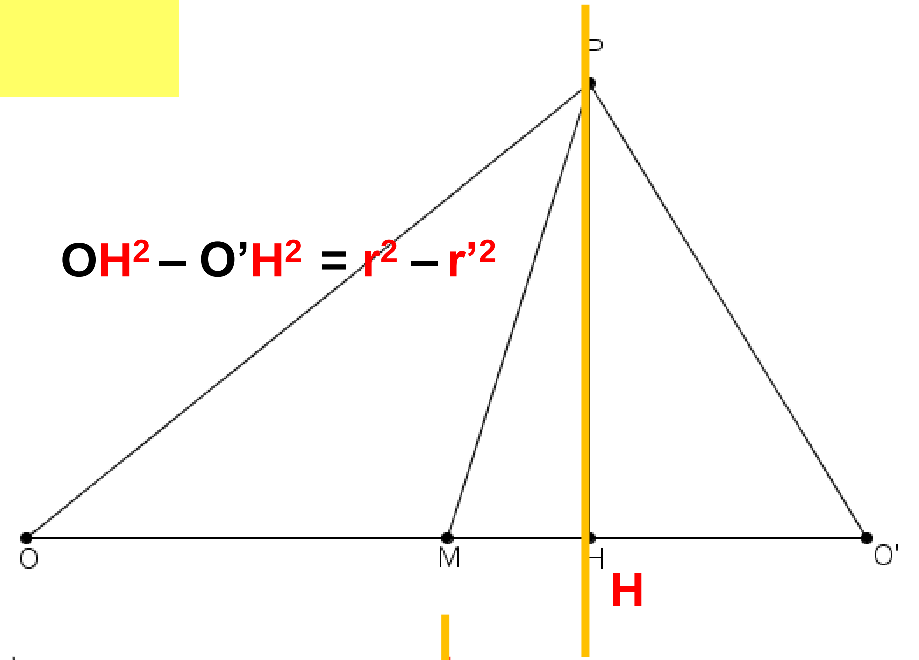
L'asse radicale

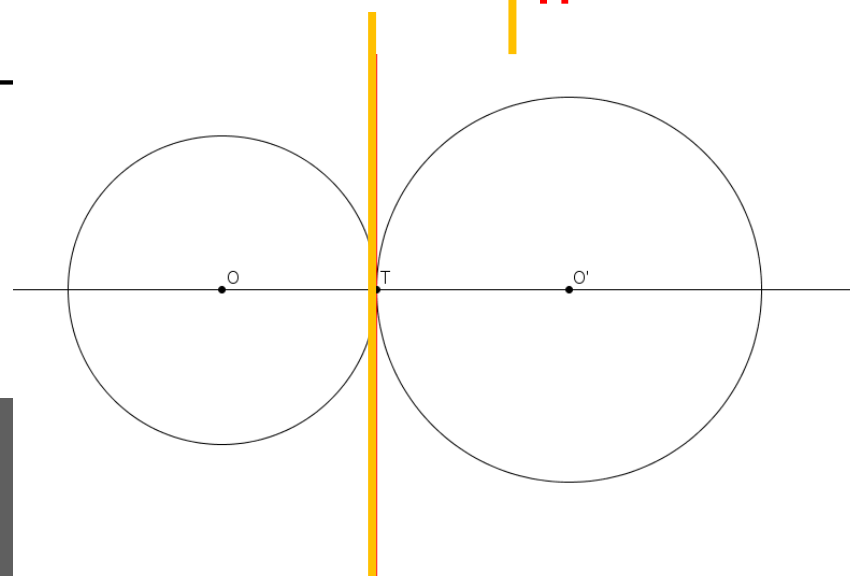
Il luogo dei punti che hanno la stessa potenza rispetto a due circonferenze date. E' una retta ortogonale alla retta che passa per i due centri.

pot P = AP · BP

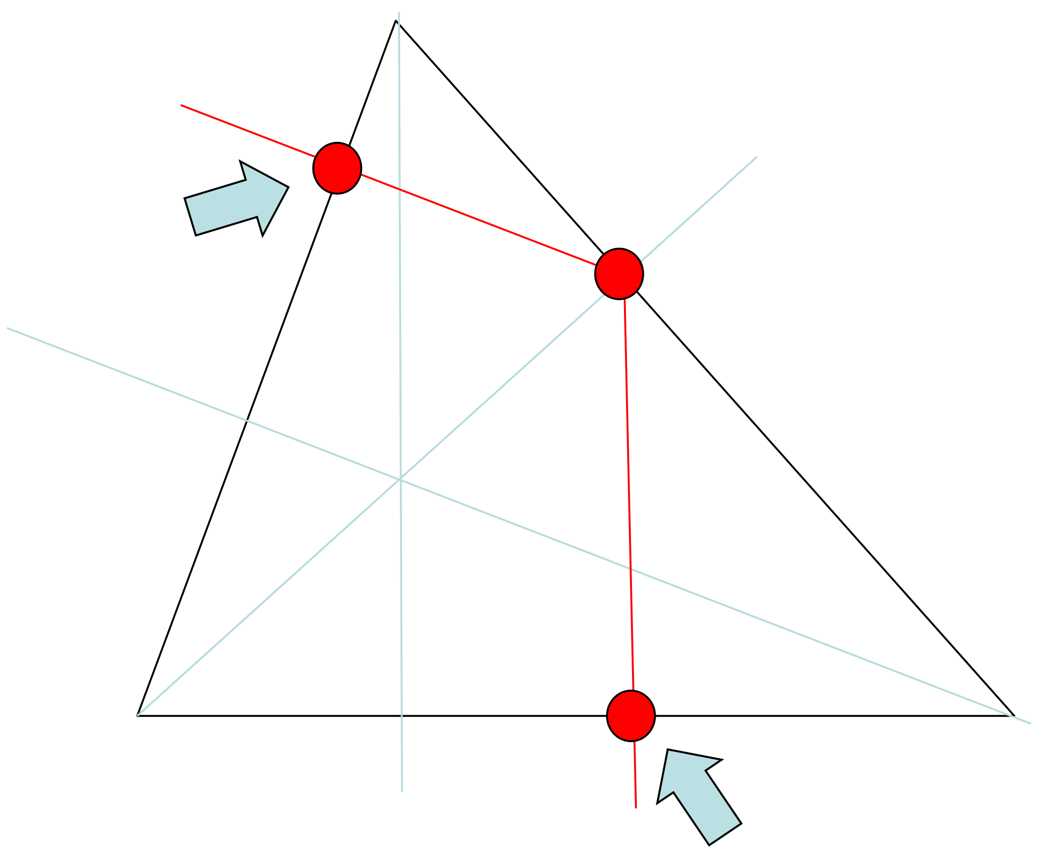


$OH^2 - O'H^2 = r^2 - r'^2$

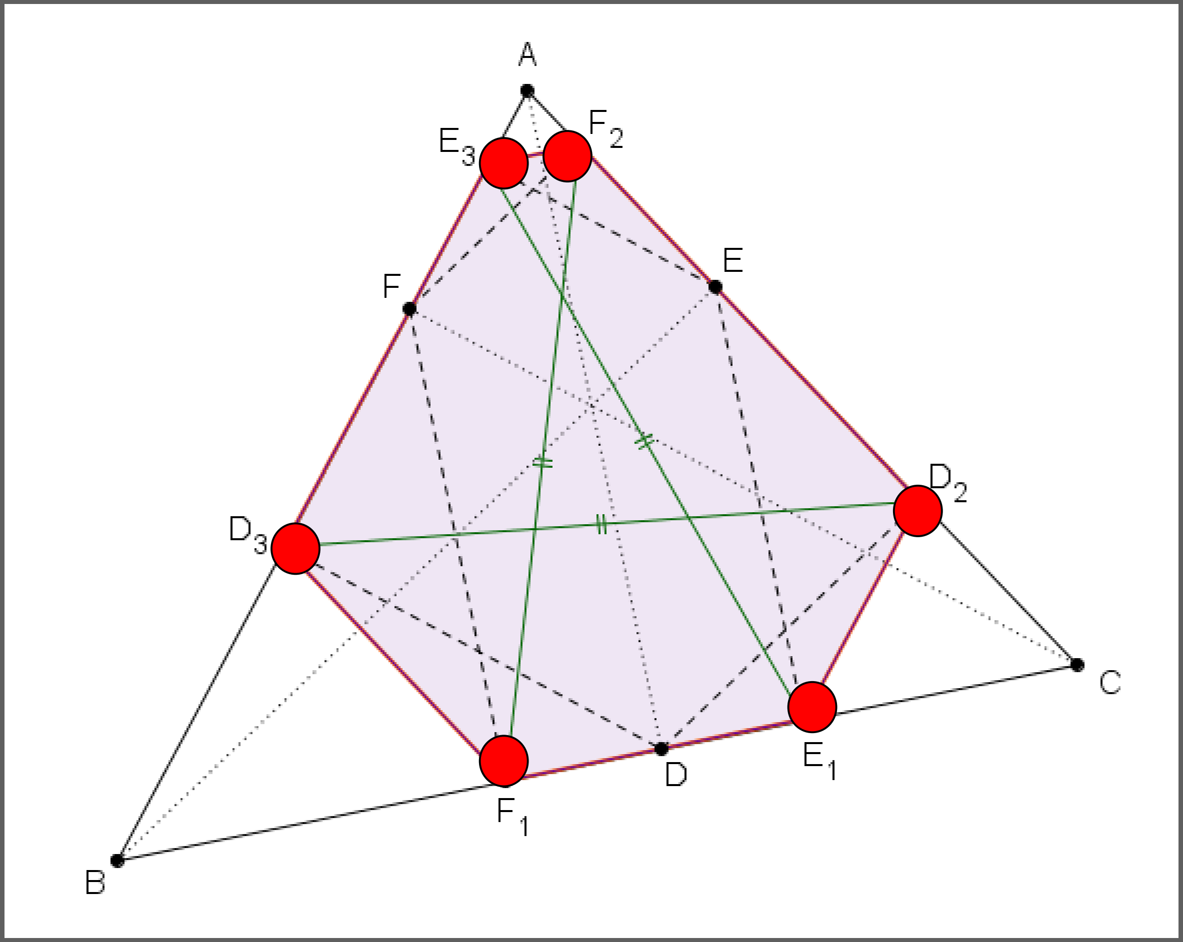




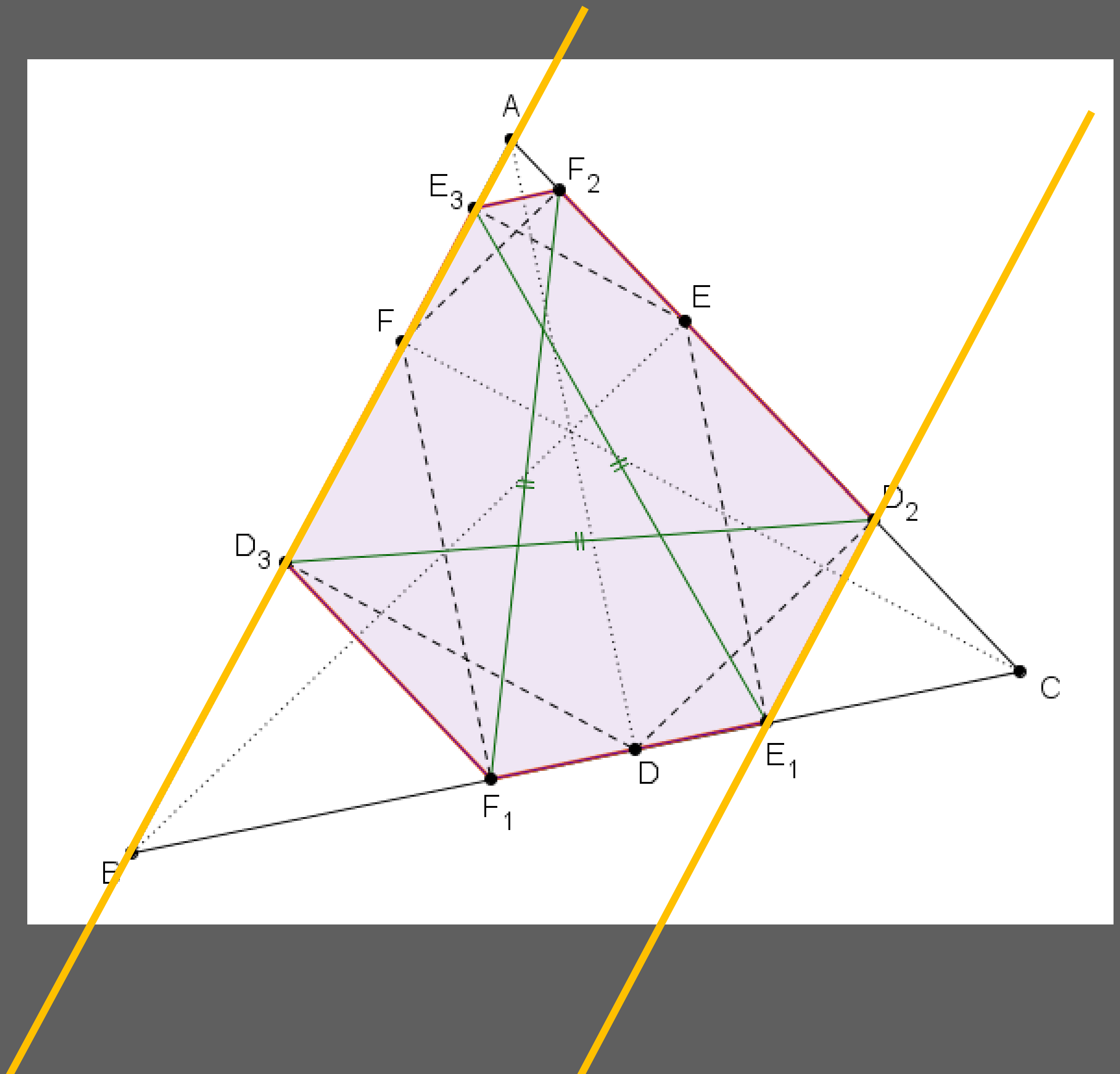
Triangoli, che passione!



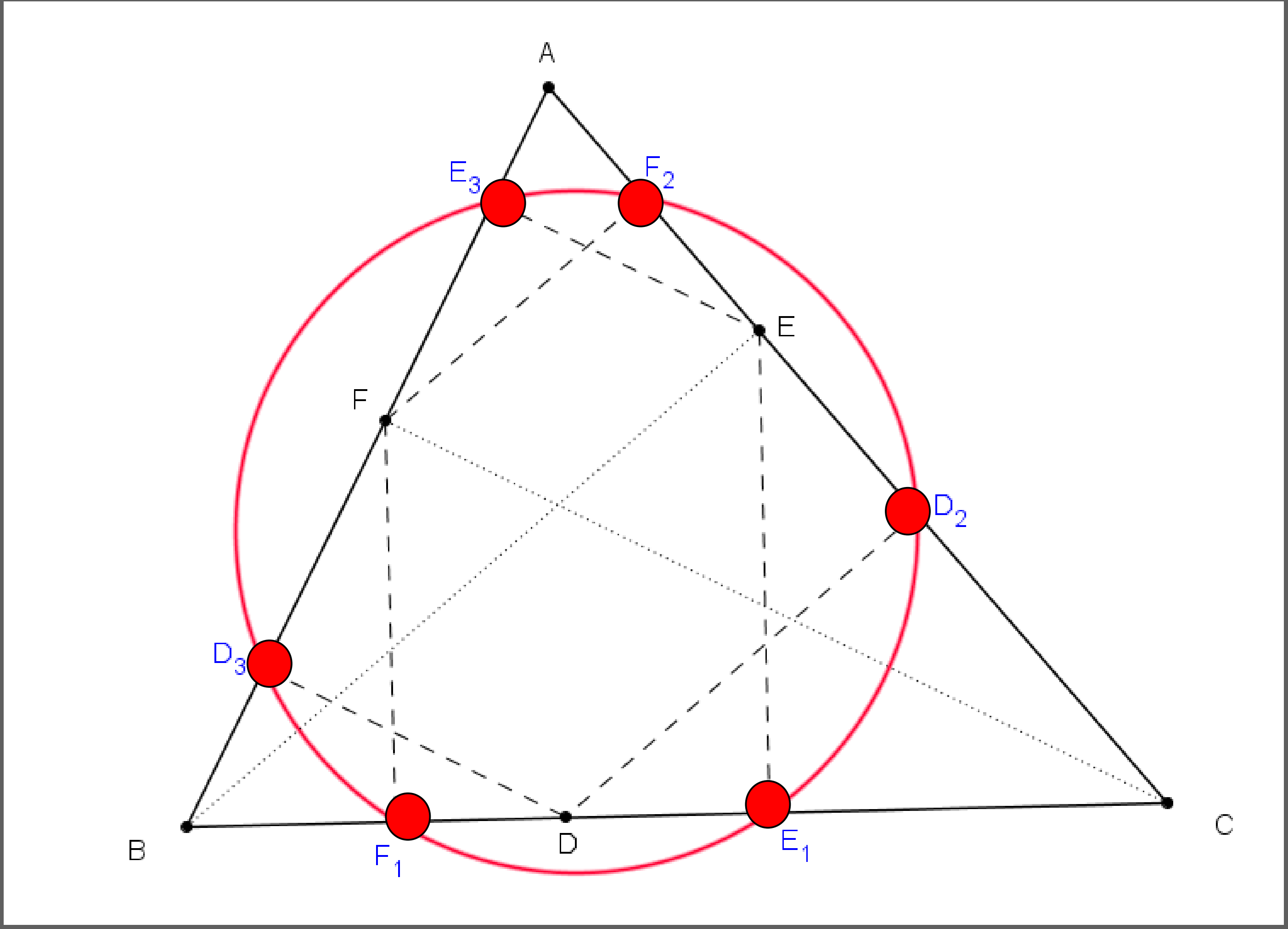
… analogamente …



Cosa osserviamo?



e anche che ...



Henry Martyn Taylor (1843-1927)
The Relations of the intersections of a Circle with a triangle (1883)

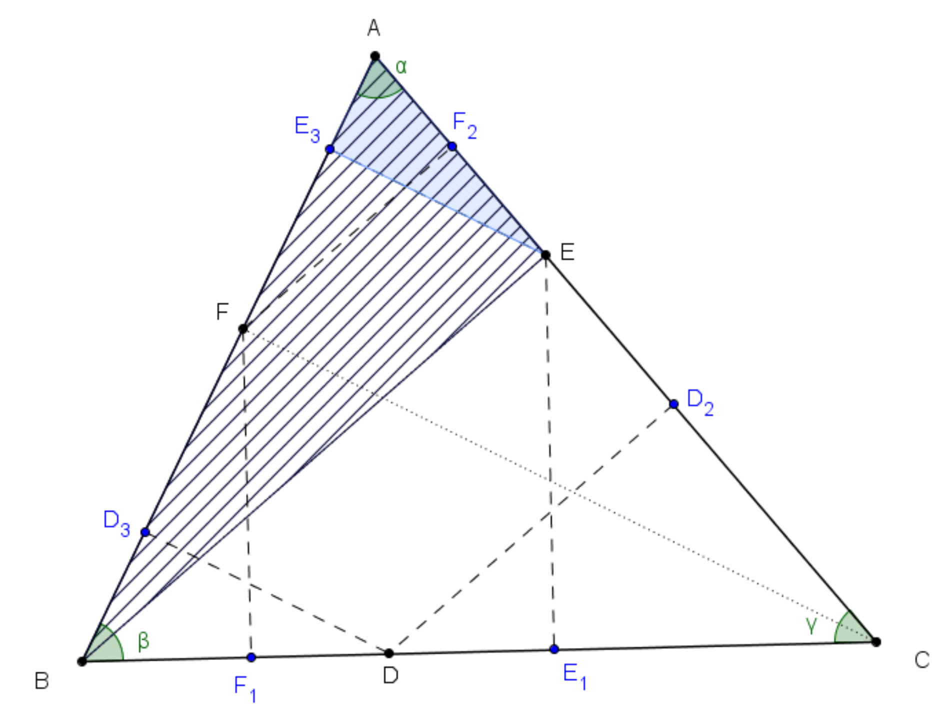
Proceedings of the London Mathematical Society, 15 (1883), p. 122.

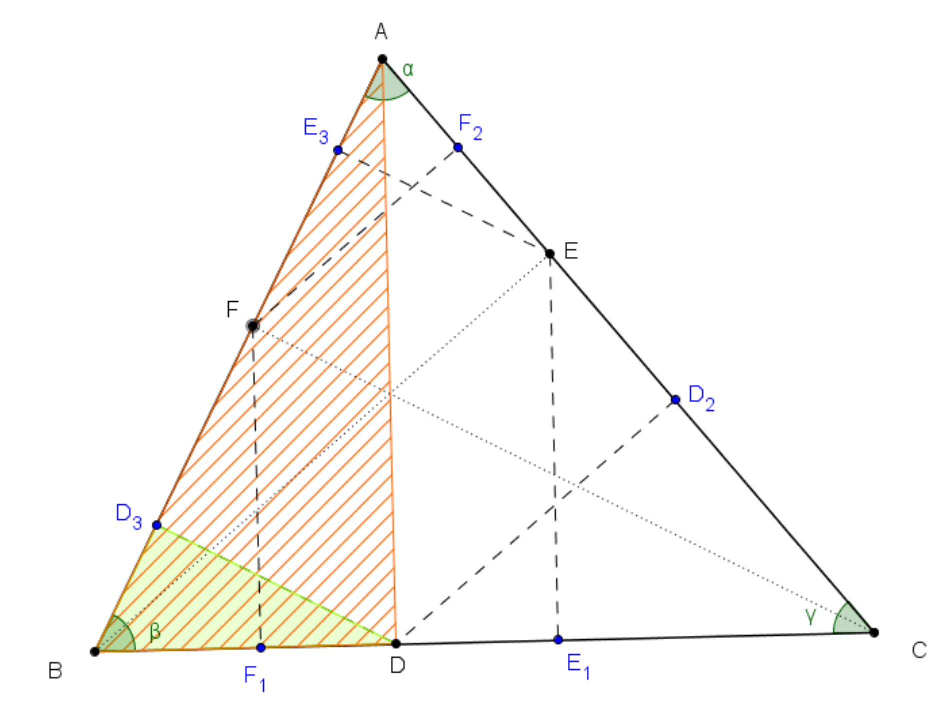
Osservare con GeoGebra

- **La circonferenza che passa per 3 dei 4 punti, ottenuti da due delle 3 altezze del triangolo, passa anche per il quarto.**
- PaolaTay1.ggb

- **Relazioni tra la circonferenza che passa per i 6 punti e altre circonferenze notevoli del triangolo? Deformare il triangolo.**
- **PaolaTriEqu.ggb**

La dimostrazione. Relazioni sulle due coppie di triangoli rettangoli simili: **il linguaggio della trigonometria**





- $AE = AB \cos \alpha$

$AE_3 = AE \cos\alpha = AB \cos^2\alpha$

- $BD = AB \cos \beta$

$BD_3 = BD \cos\beta = AB\cos^2\beta$

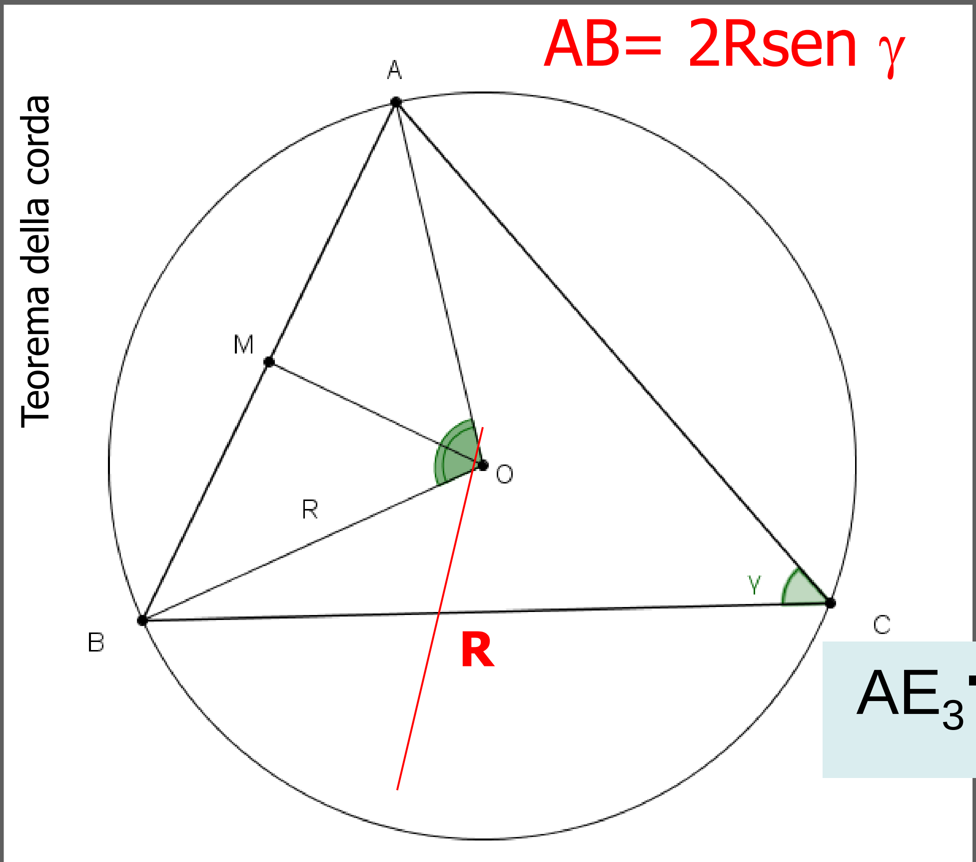
$AD_3 = AB - BD_3 = AB - AB \cos^2 \beta = AB \sin^2\beta$

- $AE_3 \cdot AD_3 = AB^2 \cos^2\alpha \sin^2\beta = ...$

- ... $AE_3 \cdot AD_3 = AB^2 \cos^2\alpha \sin^2\beta$ **=** ....

R è il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo dato

... **=** $4R^2\cos^2\alpha \sin^2\beta \sin^2\gamma$



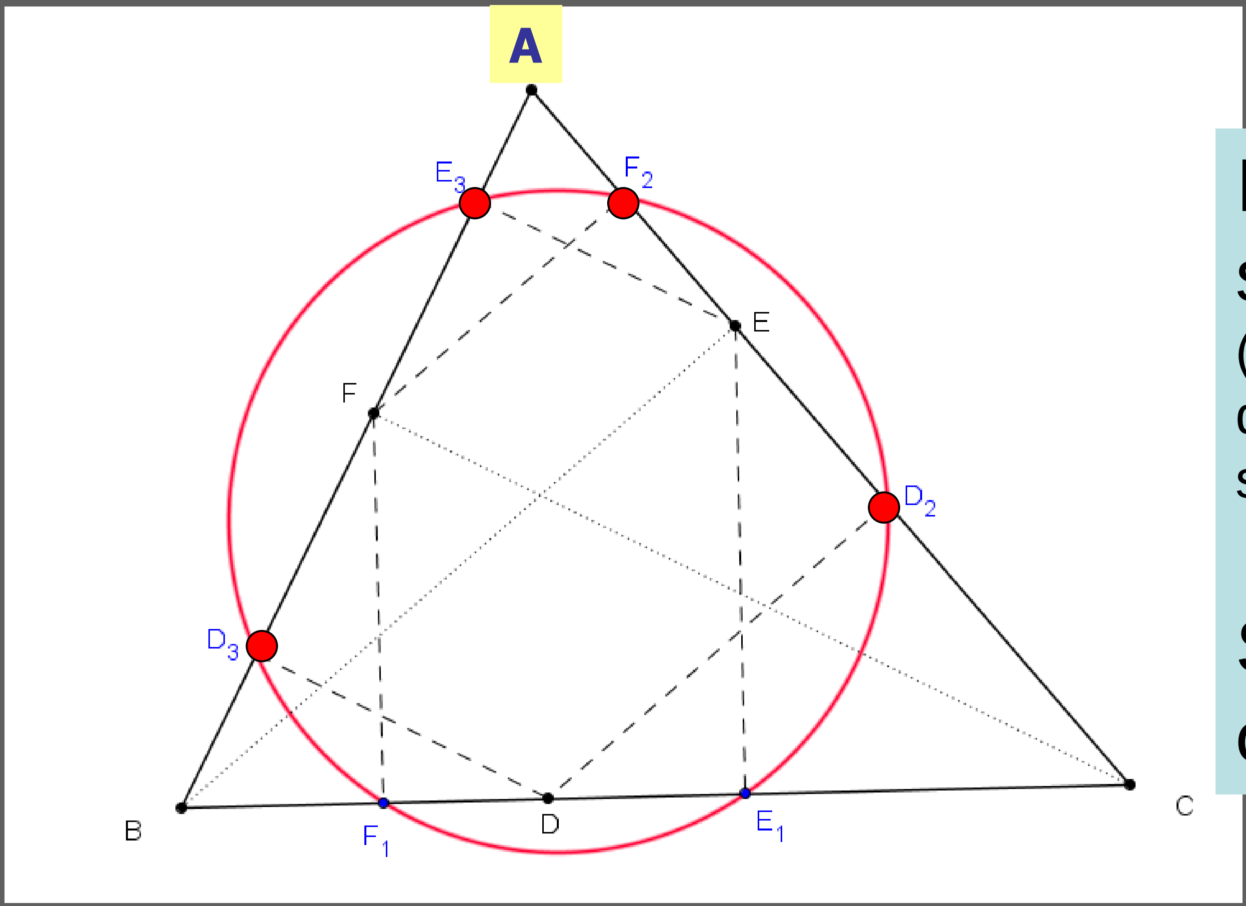
$AE_3 \cdot AD_3 = 4R^2\cos^2\alpha \sin^2\beta \sin^2\gamma$

$AE_3 \cdot AD_3 = 4R^2\cos^2\alpha \sin^2\beta \sin^2\gamma$

Analogamente, avremo …

$AD_2 \cdot AF_2 = 4R^2\cos^2\alpha \sin^2\beta \sin^2\gamma$

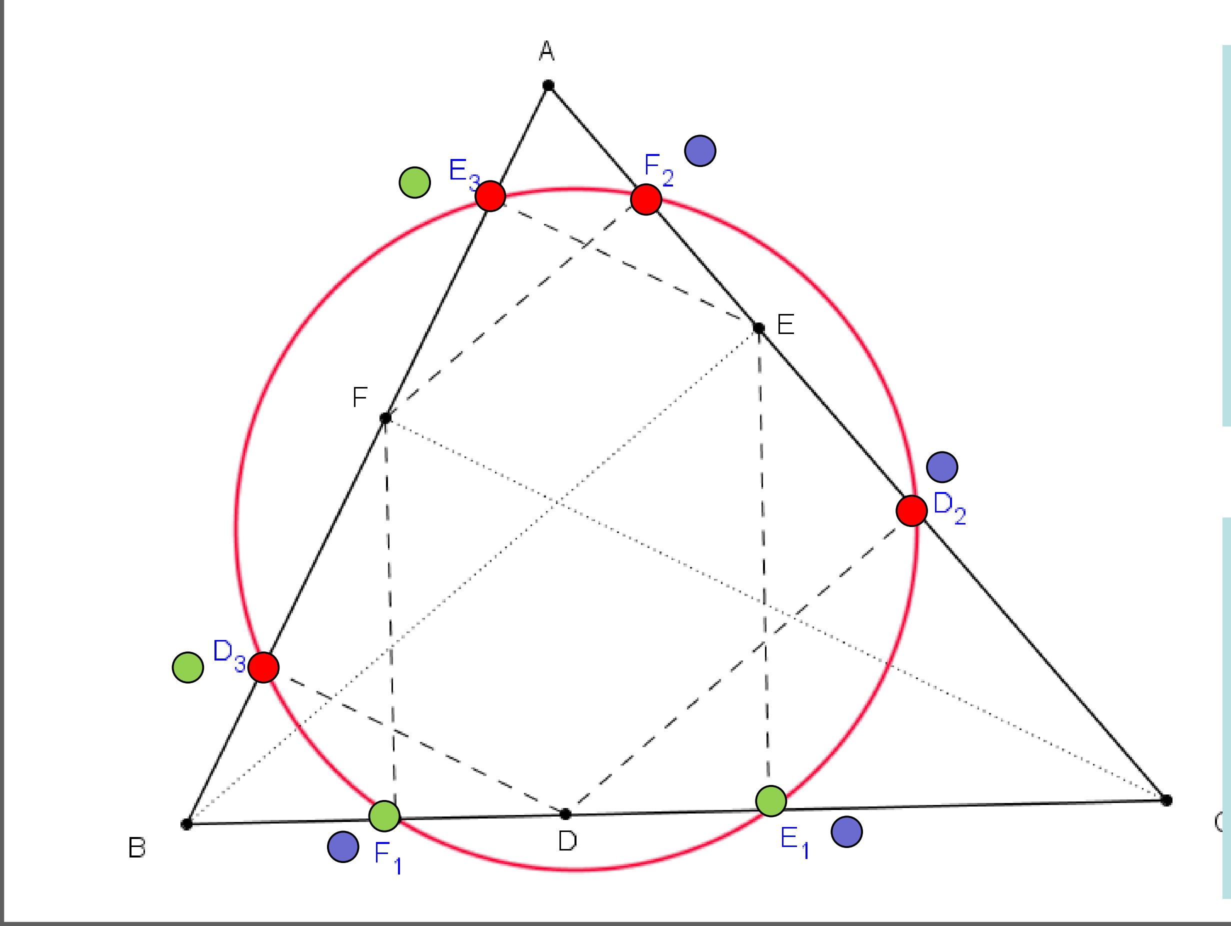
$\mathbf{AE_3 \cdot AD_3 = AD_2 \cdot AF_2}$



I 4 punti «rossi» sono conciclici (l'assicura il teorema della tangente e della secante).

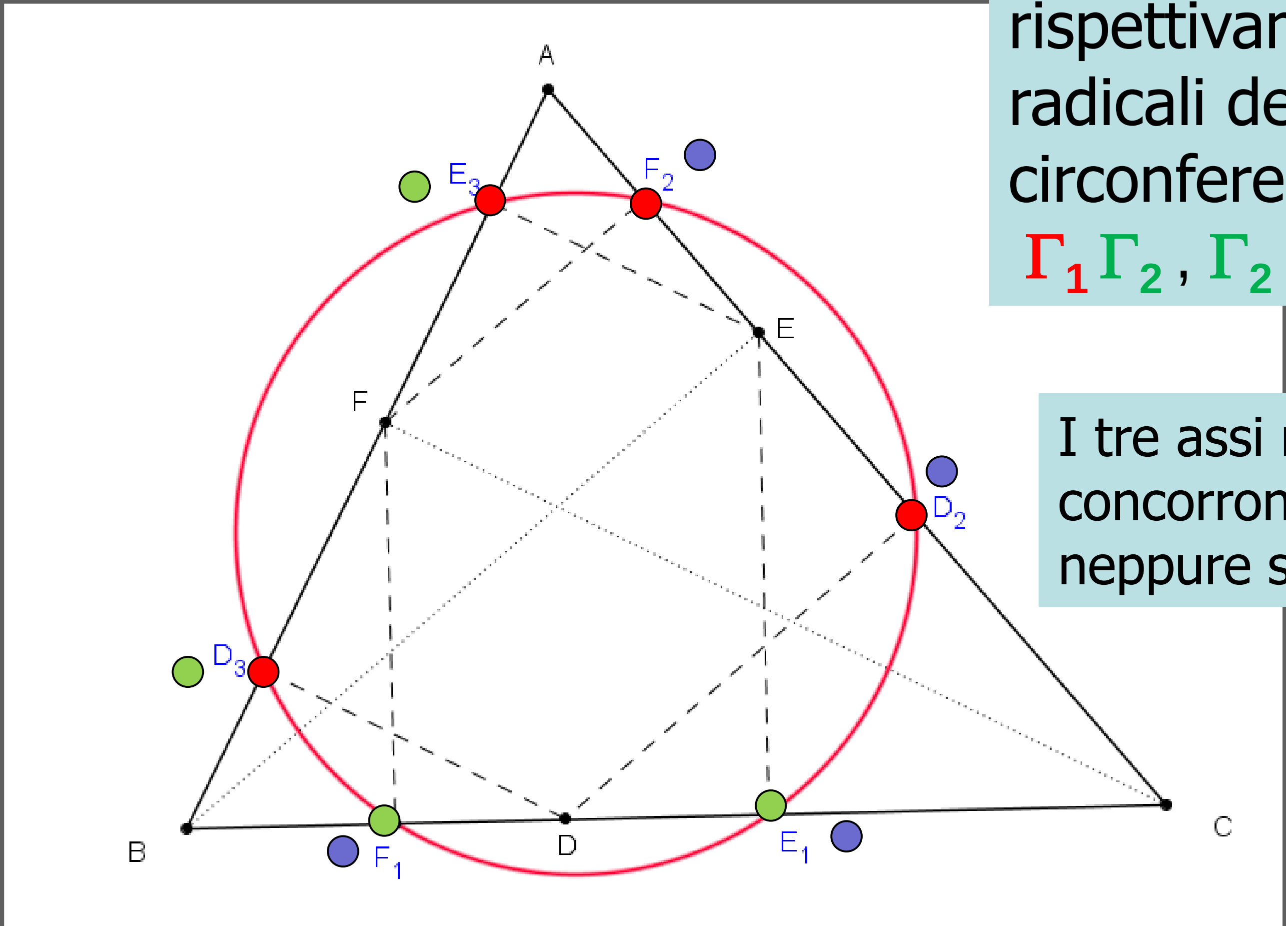
Sia Γ_1 la circonferenza …

Con relazioni analoghe si dimostra che



I 4 punti «**verdi**» sono conciclici. Sia Γ_2 la circonferenza …

I 4 punti «**blu**» sono conciclici. Sia Γ_3 la circonferenza …



Le rette AB, BC e AC sono, rispettivamente, gli assi radicali delle 3 coppie di circonferenze

$\Gamma_1 \Gamma_2$, $\Gamma_2 \Gamma_3$, $\Gamma_1 \Gamma_3$.

I tre assi radicali non concorrono in un punto e neppure sono paralleli tra loro.

Non può che essere: $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3$

GRAZIE

PER L’ATTENZIONE