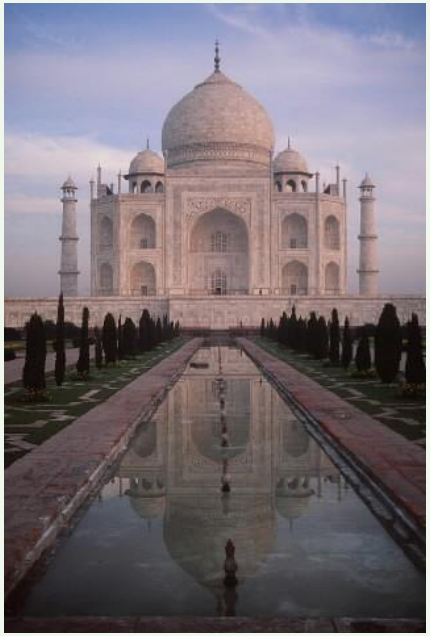
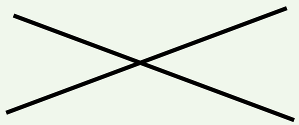
La simmetria, in matematica e nell'arte

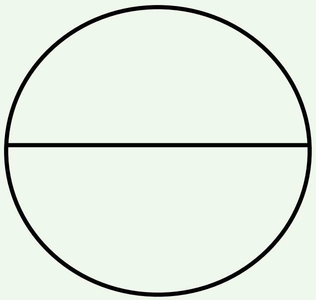
Renato Betti – Politecnico di Milano



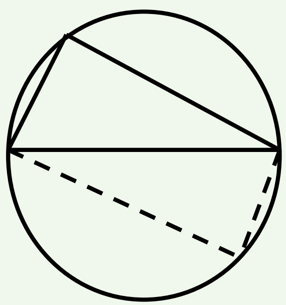
I teoremi di Talete



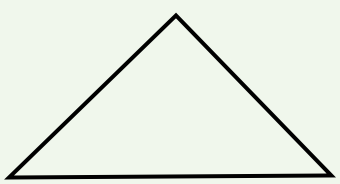
Angoli opposti al vertice sono uguali



Un diametro divide il cerchio in due parti uguali

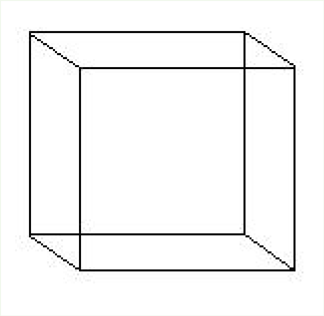


Angoli inscritti in una semicirconferenza sono retti

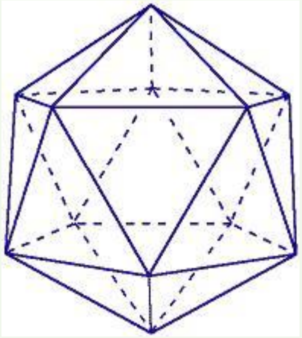


Gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono uguali (*pons asinorum*)

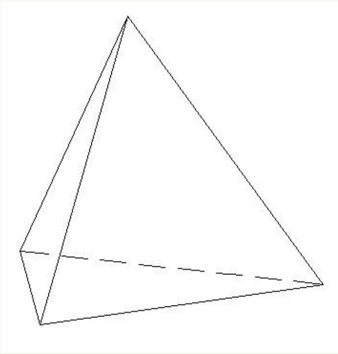
I solidi platonici



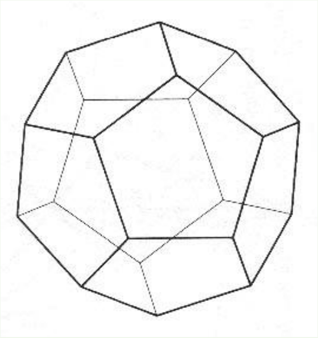
terra



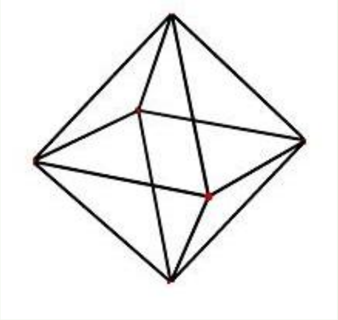
aria



fuoco



etere
(modello di universo)

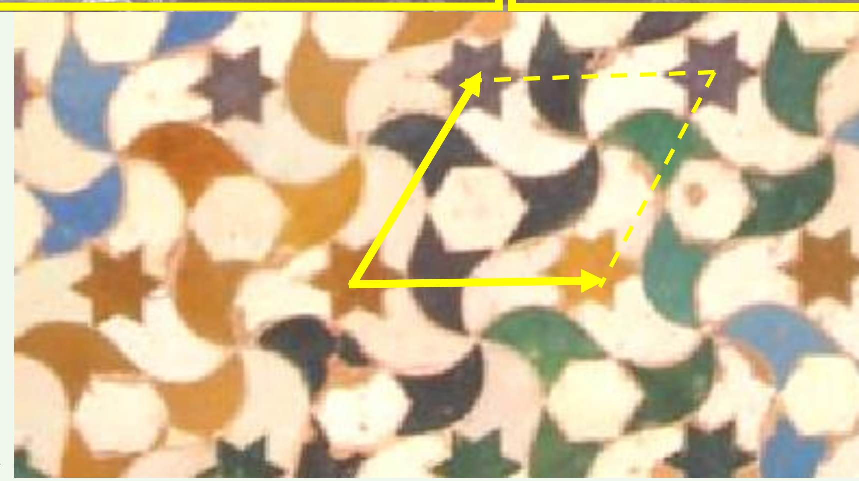


acqua

Rosoni, fregi e mosaici nell’Alhambra

Rosoni

Fregi



Mosaici

Che cos’è la simmetria ?

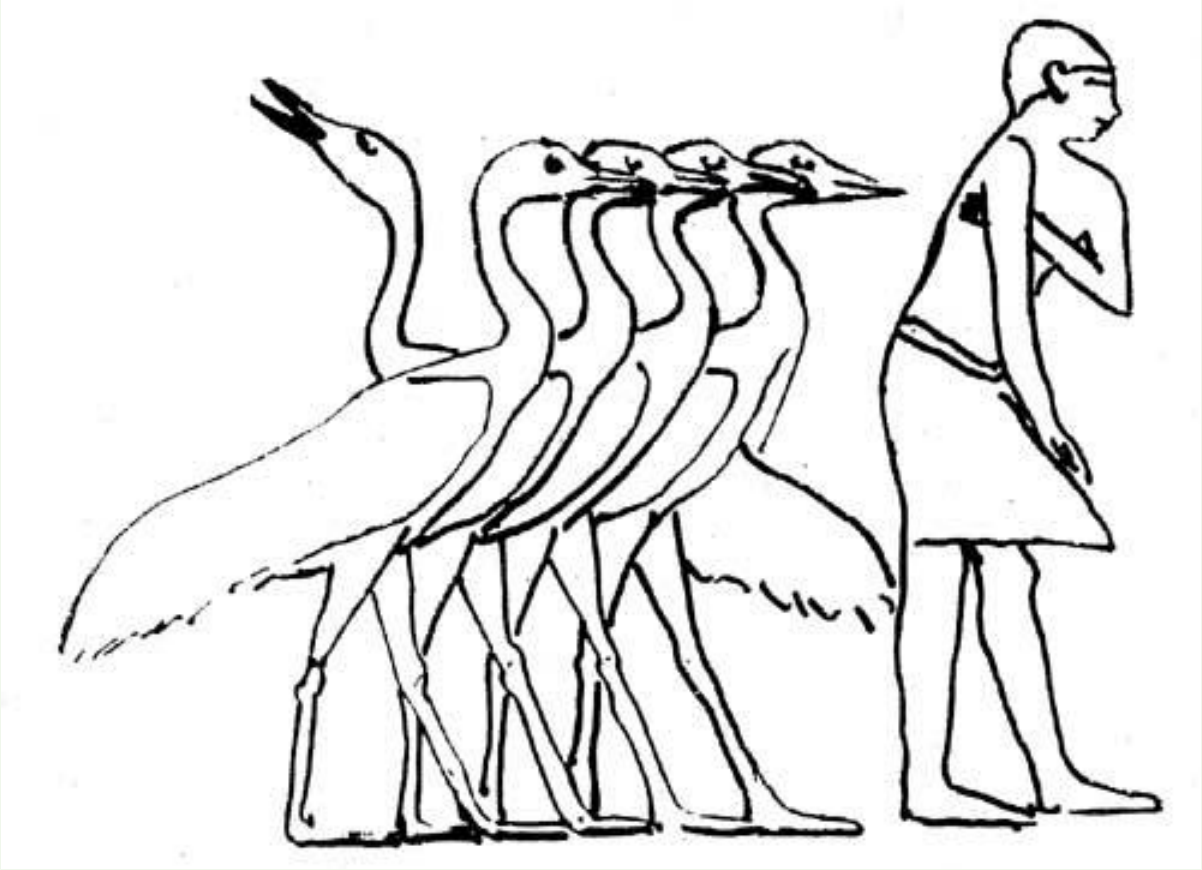
proprietà di figure geometriche in cui i punti corrispondenti si trovano allineati da parti opposte e alla stessa distanza rispetto a un punto (detto *centro di simmetria*), a una retta (*asse di simmetria*) o ad un piano.

(fig.) Disposizione, collocazione ordinata e armonica delle parti che costituiscono un insieme.
Sinonimi: armonia, equilibrio, proporzione.

(etim.) Dal greco *Syn* “con, insieme” e un derivato di *metron*, “misura”

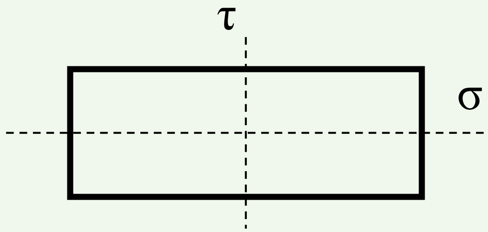
Le simmetrie di una figura piana F sono le isometrie T del piano che lasciano inalterata la figura: $T(F) = F$

La vera bellezza è una deliberata, parziale, rottura di simmetria
(proverbio Zen)

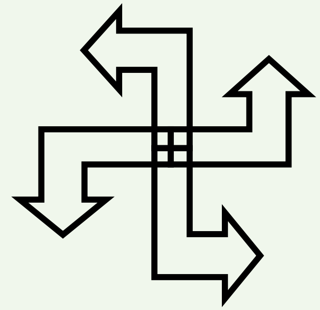


(Saqqara, XXV a.C.)

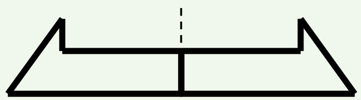
“Quanta” simmetria ha una figura?



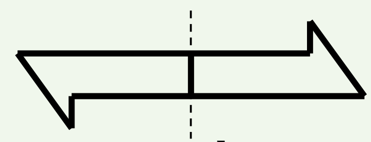
$\{id, \sigma, \tau, \rho_\pi\}$



$\{id, \rho_{\pi/2}, \rho_\pi, \rho_{3\pi/2}\}$



isometria sinistrorsa



isometria destrorsa

I numeri misurano quantità. I gruppi misurano la simmetria perché tengono conto della struttura che ha l'insieme delle trasformazioni (composizione e parità).

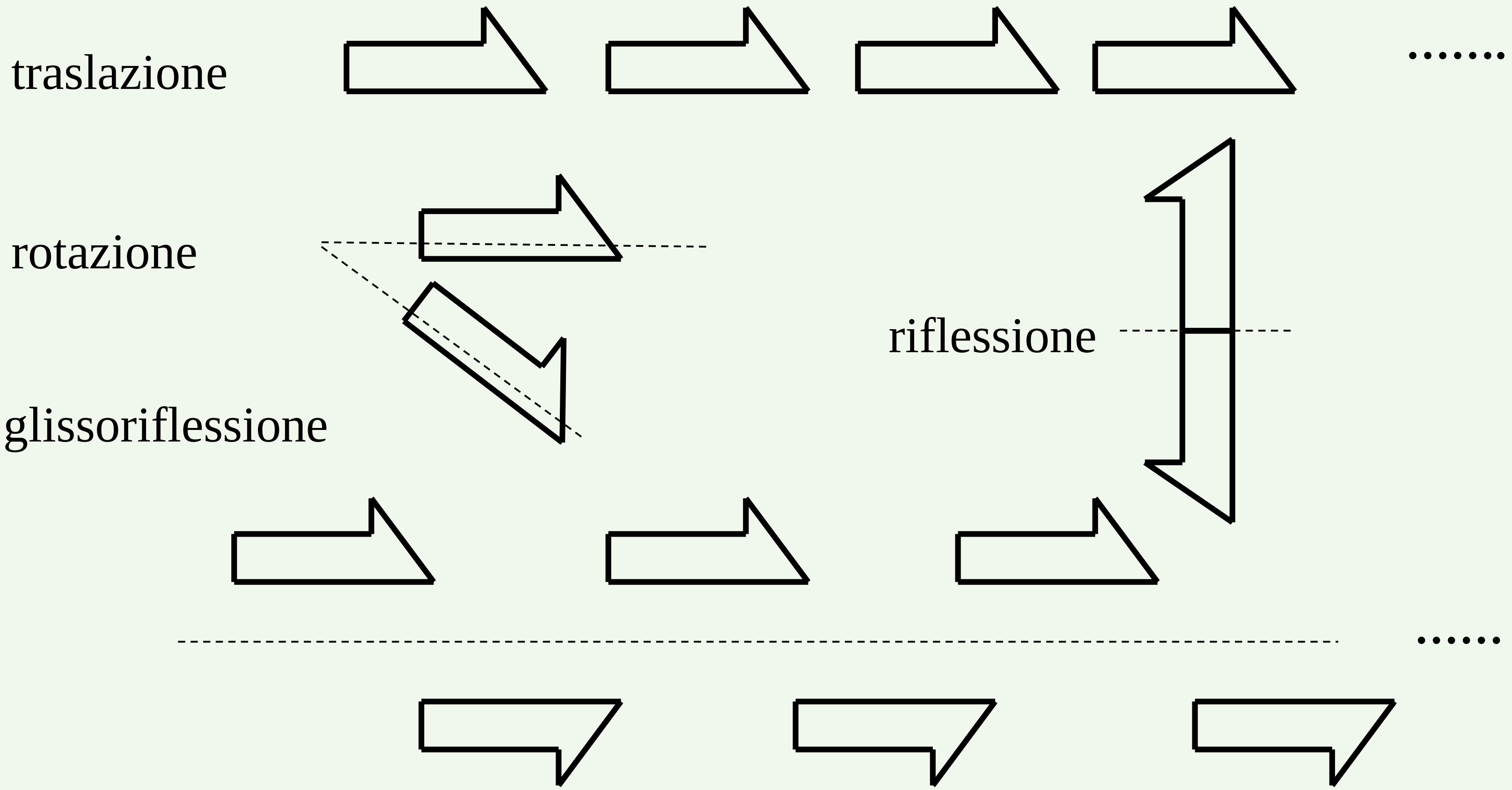
Gruppo di isometrie

$f \cdot g \in G$ $\qquad f^{-1} \in G$

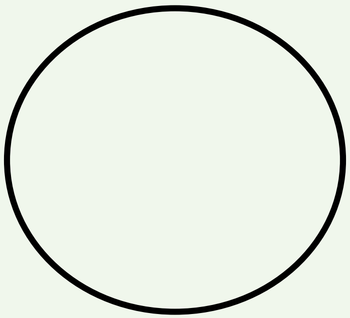
$id \in G$ $\qquad (f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$

Classificazione delle isometrie piane

Teorema: le uniche isometrie piane sono *traslazioni*, *rotazioni*, *riflessioni* e *glissoriflessioni*. Le traslazioni e le rotazioni non alterano la orientazione delle figure (sono *pari*, o *destrorse*), le riflessioni e le glissoriflessioni sono isometrie *dispari*, o *sinistrorse*.



Gruppi discreti di isometrie

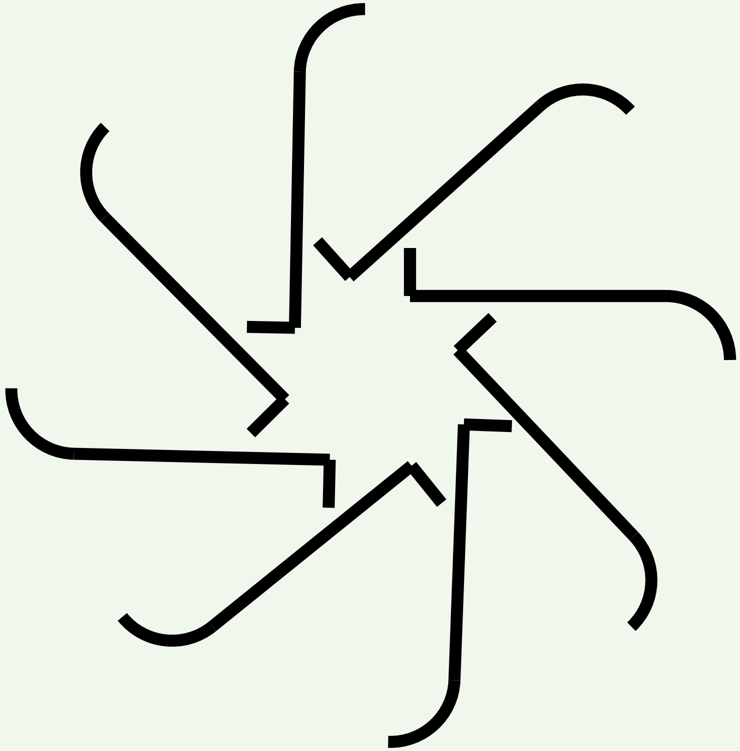


Definizione: un gruppo G di isometrie piane è detto *discreto* se non contiene rotazioni o traslazioni arbitrariamente piccole, cioè se per ogni punto A del piano esiste un cerchio di centro A e (raggio $r_{\boldsymbol{A}}$) in cui non sono contenuti altri punti dell'orbita di A:

$$\{g(A) | \text{ per ogni } g \in A\}$$

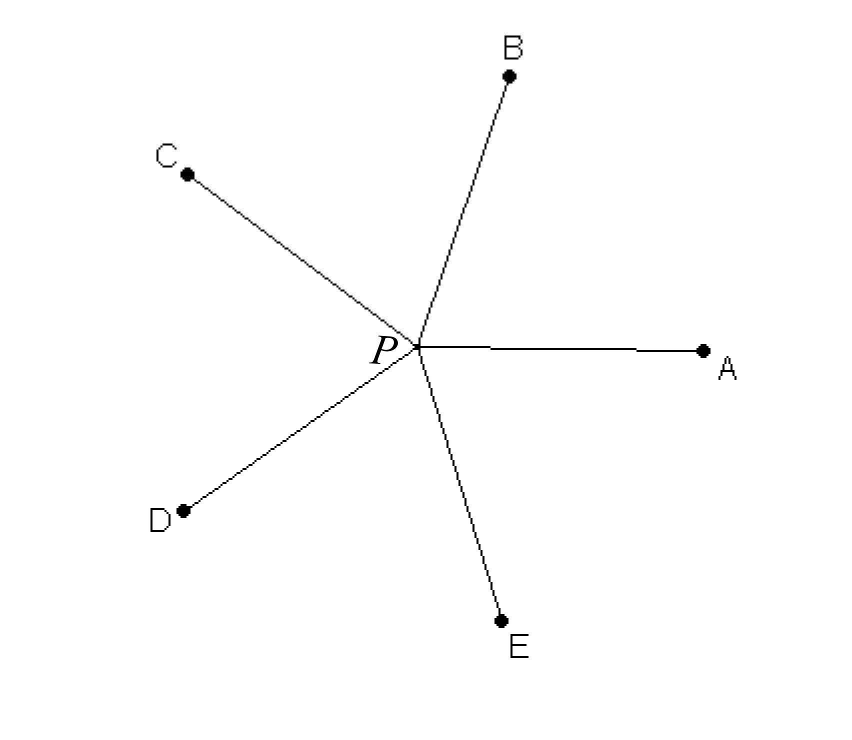
Il principio del caleidoscopio

Ogni gruppo discreto di isometrie piane è il gruppo di simmetria di una figura.



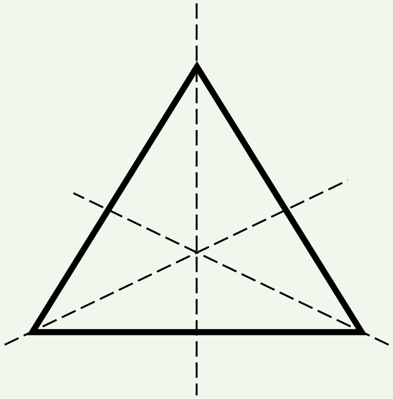
Gruppi finiti di isometrie piane

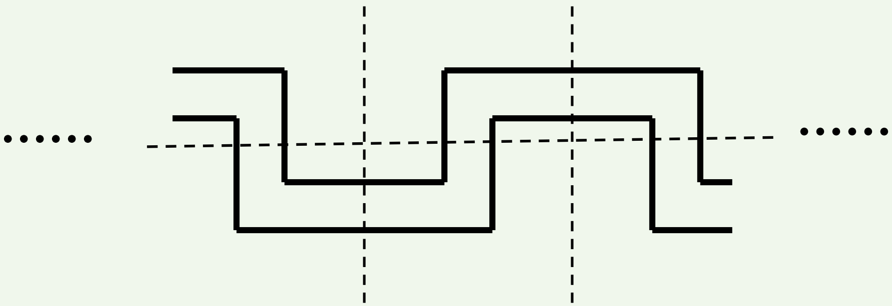
Teorema (di punto fisso): il gruppo discreto di isometrie piane G è finito se e solo se ha almeno un punto fisso (e quindi è una rotazione oppure una riflessione)

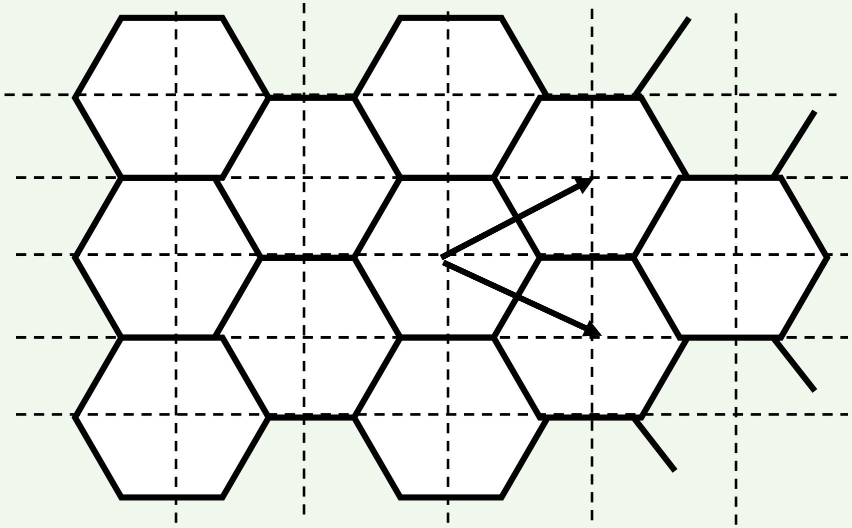


$$P = \frac{1}{n}(\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} + \mathrm{D} + \mathrm{E})$$

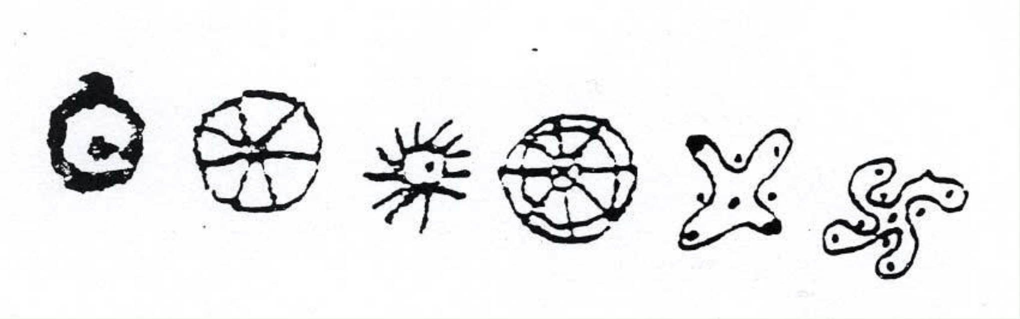
Rosoni, fregi e mosaici



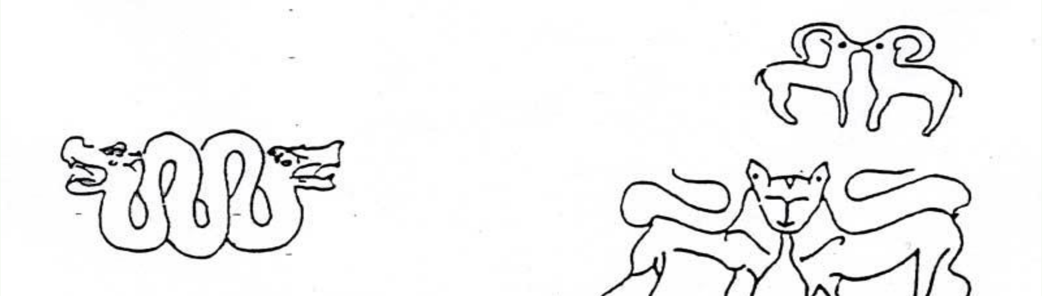




Rosoni



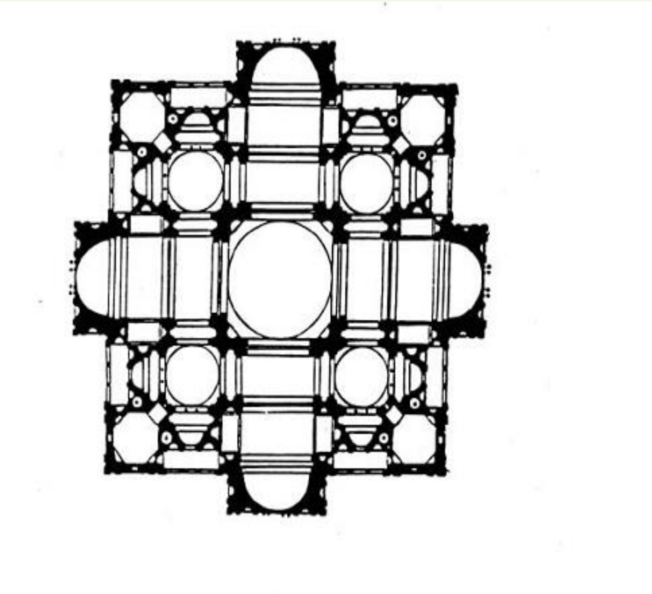
Variazioni sul tema del sole - Neolitico superiore



Maya

Egitto pre-dinastico

Alhambra di Granada – XIII-XIV secolo

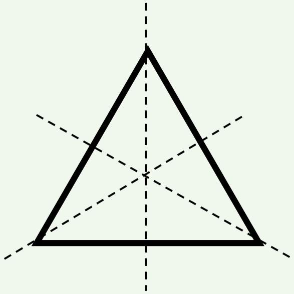


Bernini, originale della pianta di S. Pietro – XVII secolo

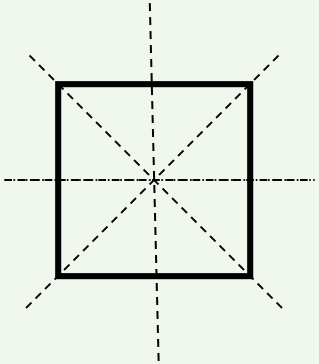
Teorema di Leonardo: ogni gruppo di rosoni è un gruppo diedrale oppure ciclico finito

I gruppi diedrali D_n

(gruppi di simmetria dei poligoni regolari)

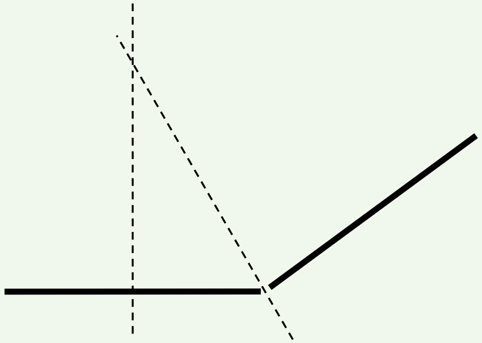


$D_3=\{\sigma, \rho \mid \sigma^2=\rho^3=id, \rho^2\sigma=\sigma\rho\}$



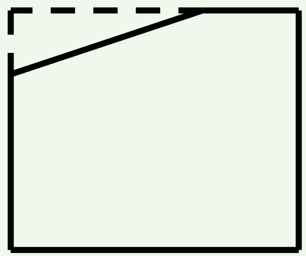
$D_4=\{\sigma, \rho \mid \sigma^2=\rho^4=id, \rho^3\sigma=\sigma\rho\}$

....

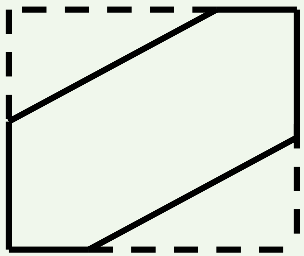


$D_n=\{\sigma, \rho \mid \sigma^2=\rho^n=id, \rho^{n-1}\sigma=\sigma\rho\}$

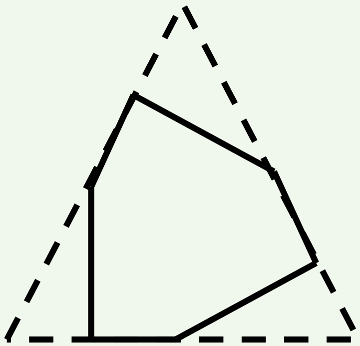
I gruppi ciclici C_n



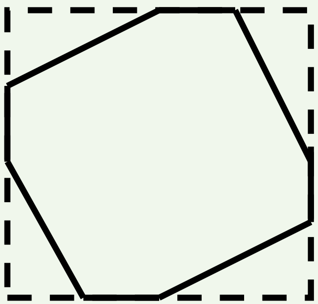
$C_1=\{id\}$



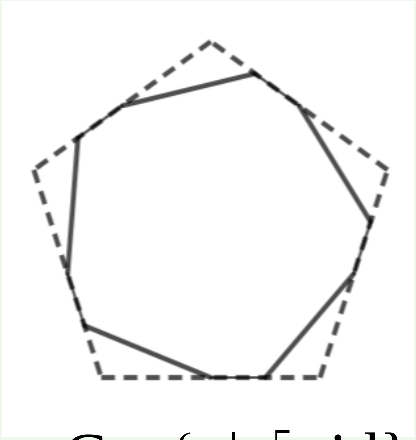
$C_2=\{\rho|\rho^2=id\}$



$C_3=\{\rho|\rho^3=id\}$



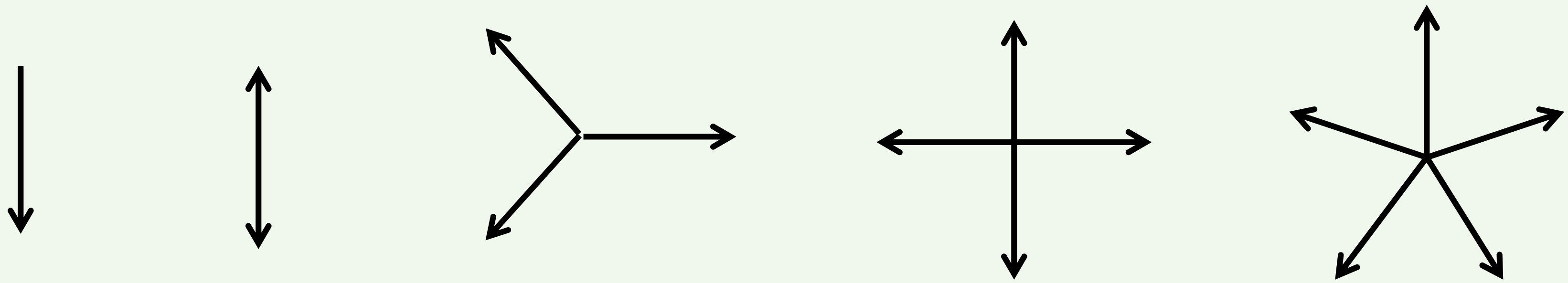
$C_4=\{\rho|\rho^4=id\}$



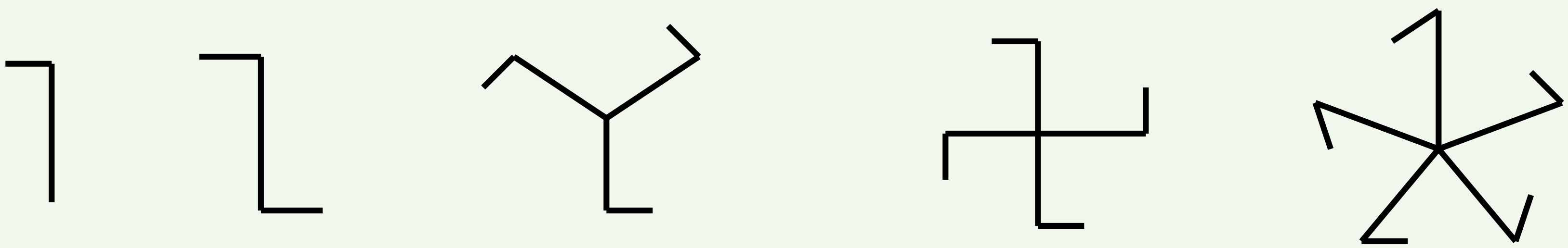
$C_5=\{\rho|\rho^5=id\}$

. . . .

Modelli di rosoni

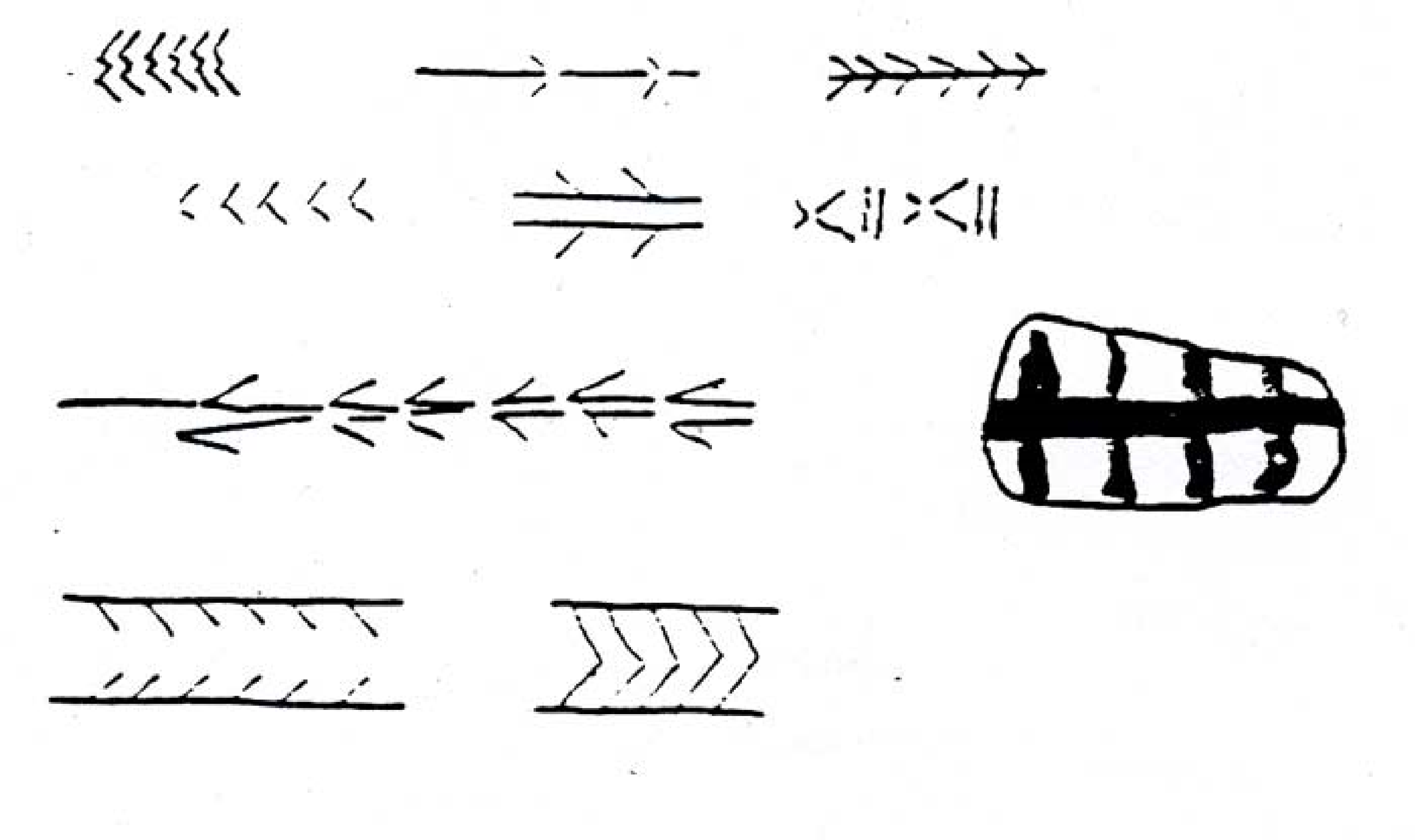


D_1 D_2 D_3 D_4 D_5

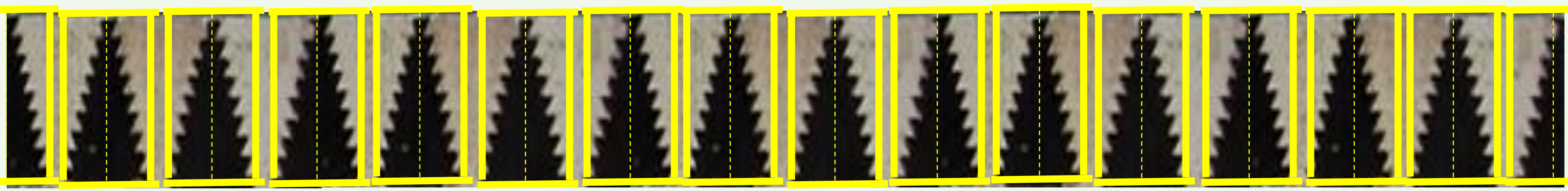


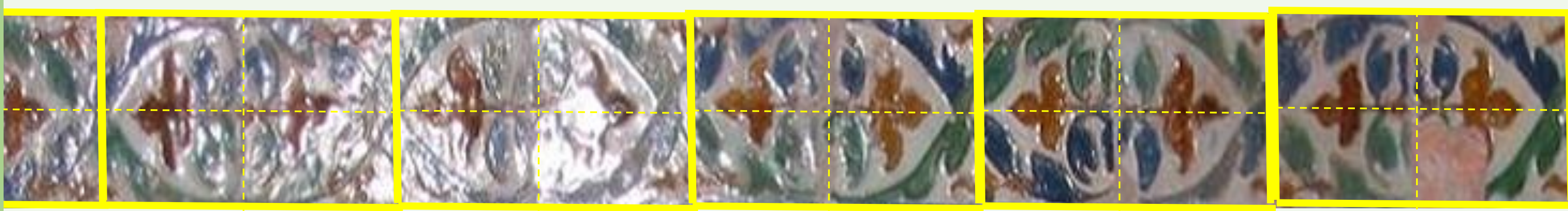
C_1 C_2 C_3 C_4 C_5

Fregi

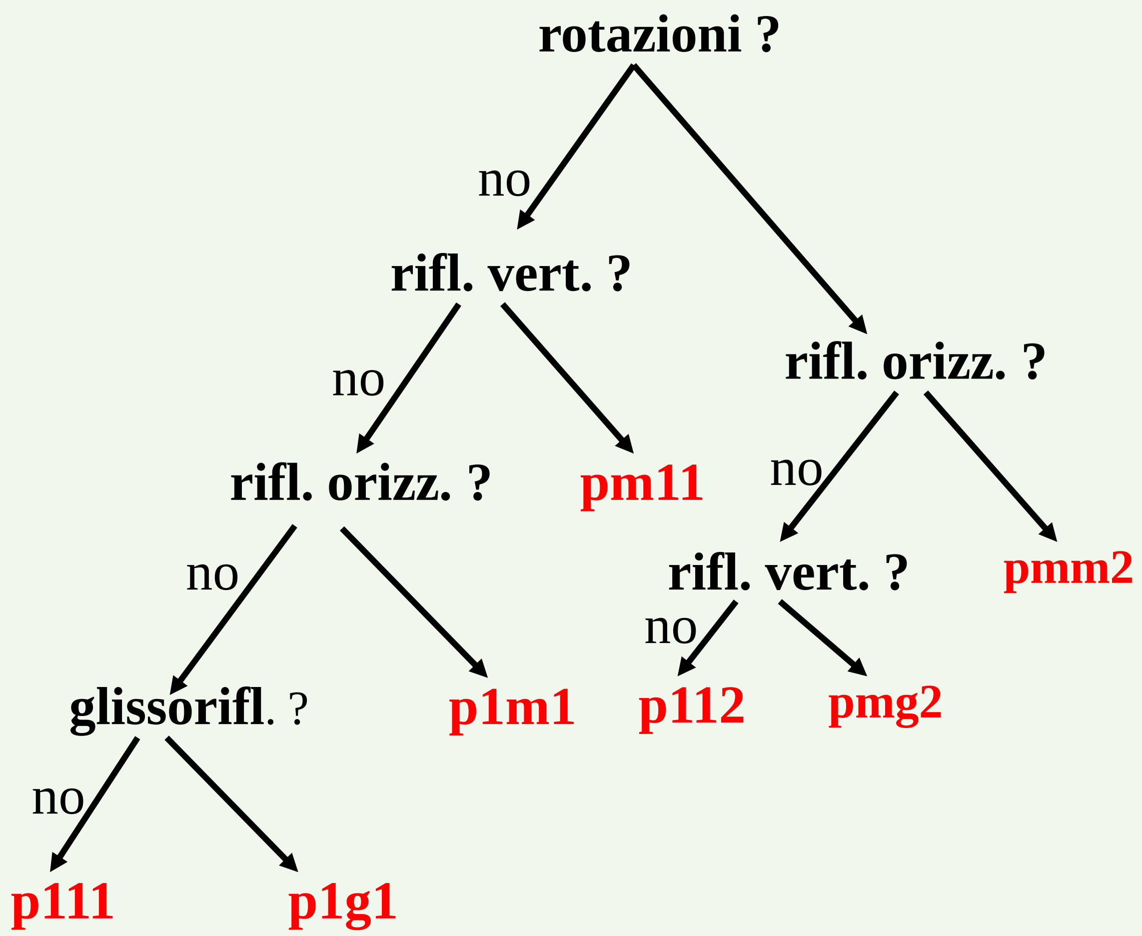


(paleolitico)





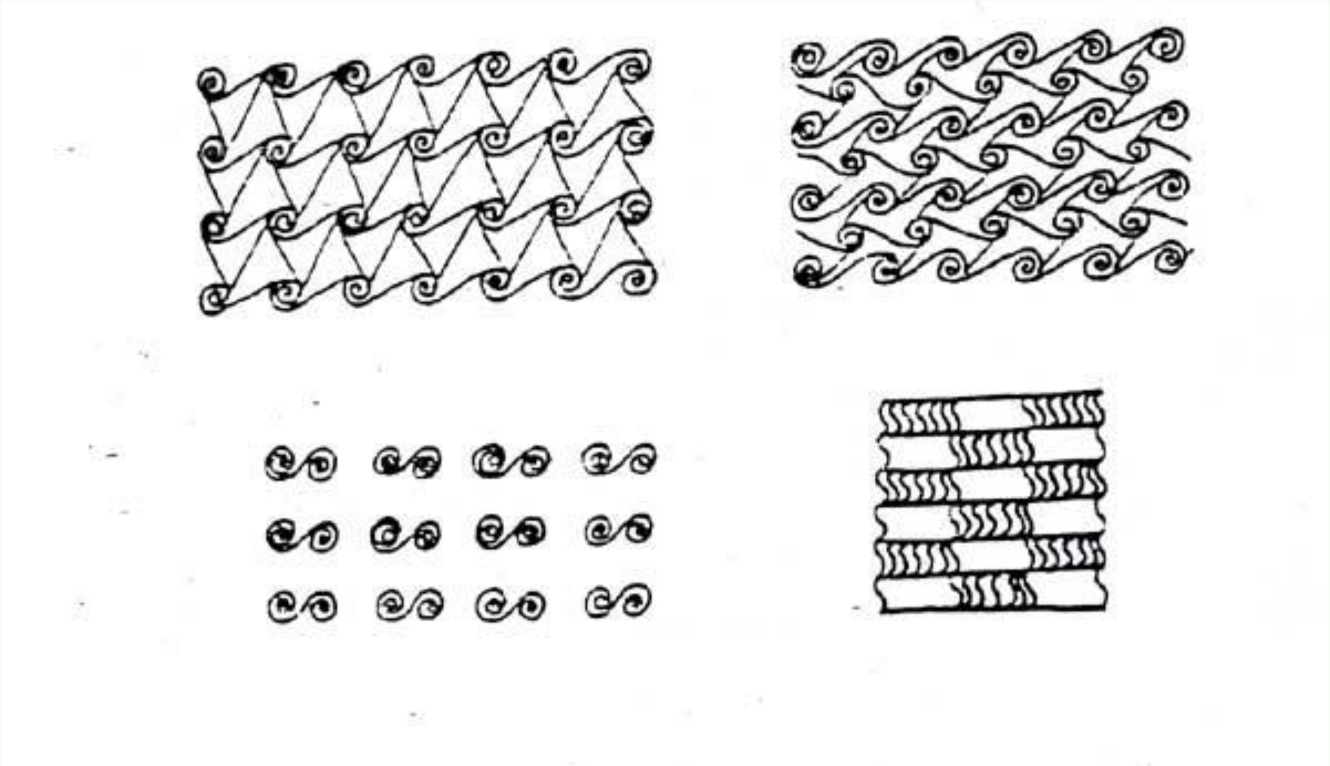
Classificazione dei fregi



I sette gruppi dei fregi

P111	**...PAPAPAPA…**	$G = \langle \tau \mid \tau(x,y) = (x+1,y) \rangle$
P112	**….NONONONO…**	$G = \langle \tau, \rho \mid \rho(x,y) = (-x,-y) \rangle$
Pm11	**...MAMAMAM…**	$G = \langle \tau, \sigma \mid \sigma(x,y) = (x,-y) \rangle$
Pmm2	**….HOHOHOHO….**	$G = \langle \tau, \rho, \sigma, \sigma' \mid \sigma'(x,y) = (-x,y) \rangle$
Pmg2	**.....↑↓↑↓↑↓↑↓....**	$G = \langle \gamma, \rho, \sigma \rangle$
P1g1	**.....↑E↓E↑E↓E...**	$G = \langle \gamma \mid \gamma(x,y) = (x+1/2,-y) \rangle$
P1m1	**…..OKOKOK...**	$G = \langle \tau, \sigma' \mid \sigma'(x,y) = (-x,y) \rangle$

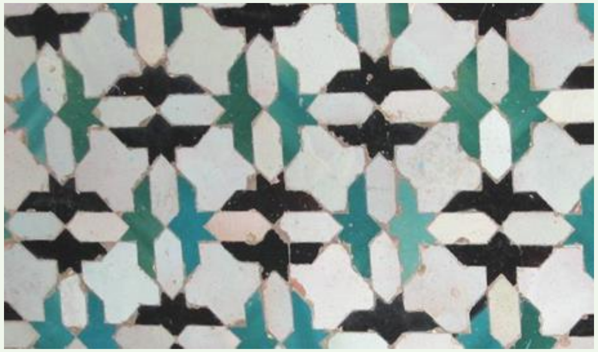
I gruppi cristallografici piani o gruppi dei mosaici o gruppi da carte da parati o arabeschi



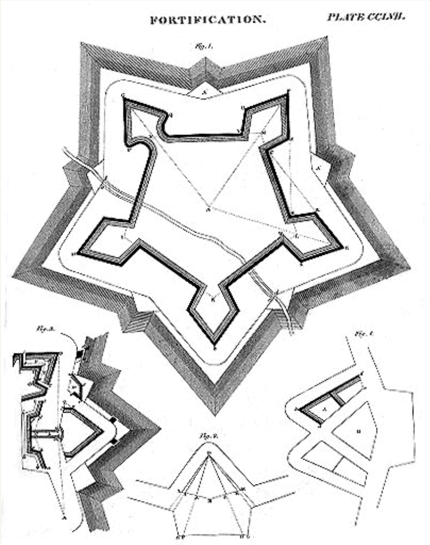
Egitto

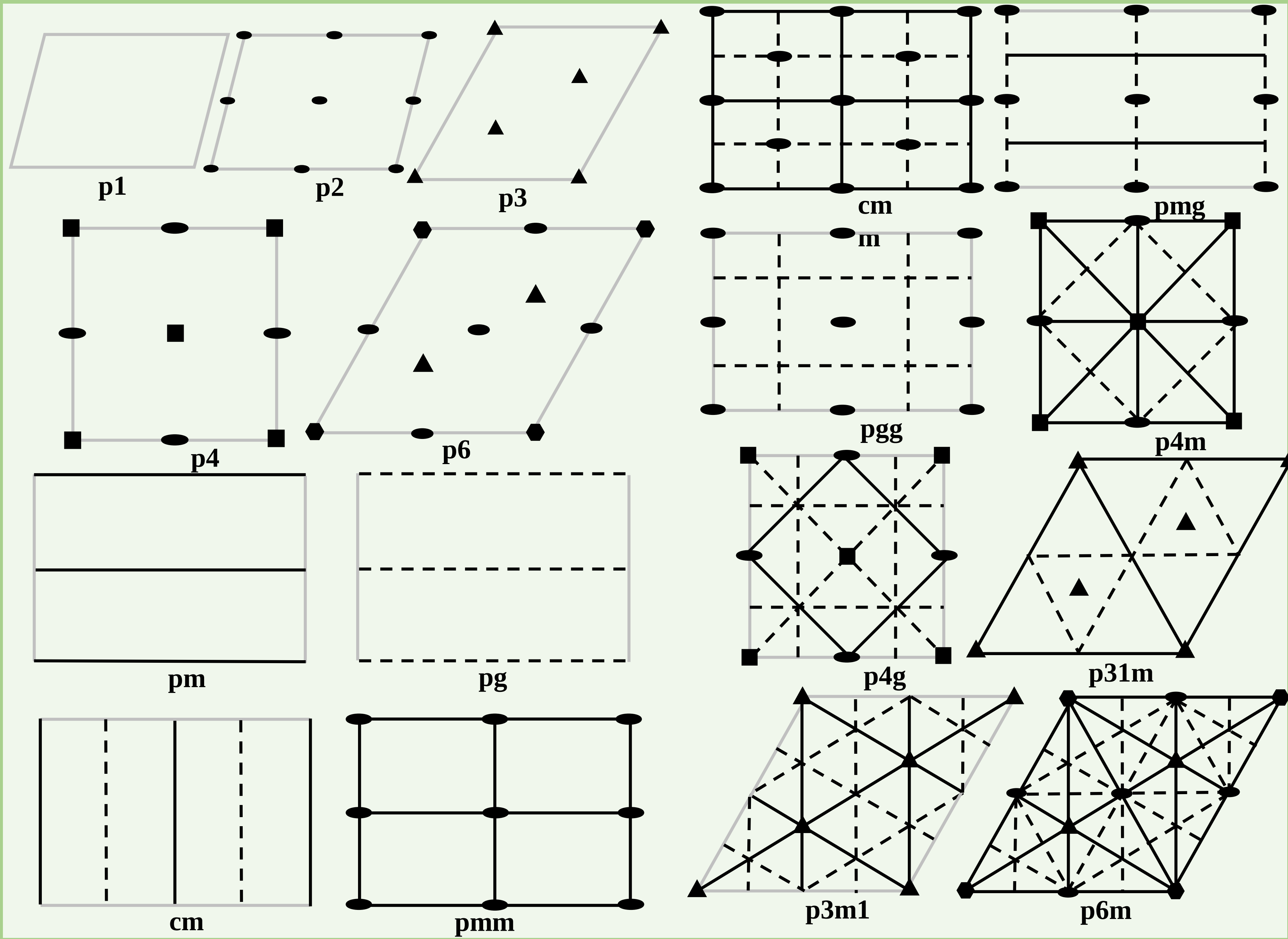
Cnosso

Granada, Alhambra

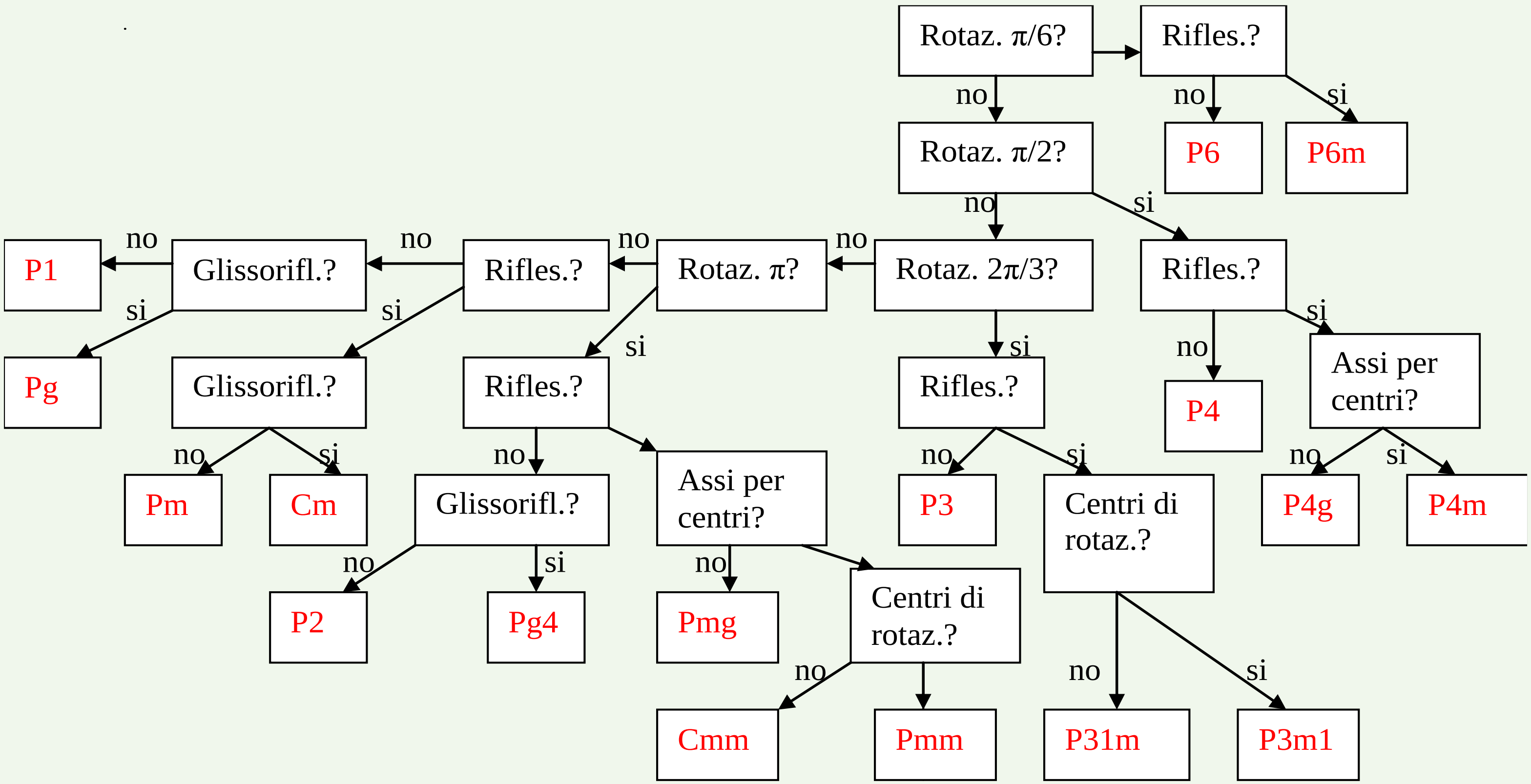


Restrizione cristallografica: le rotazioni dei mosaici possono avere ordine 1, 2, 3, 4 oppure 6 (ma non 5)

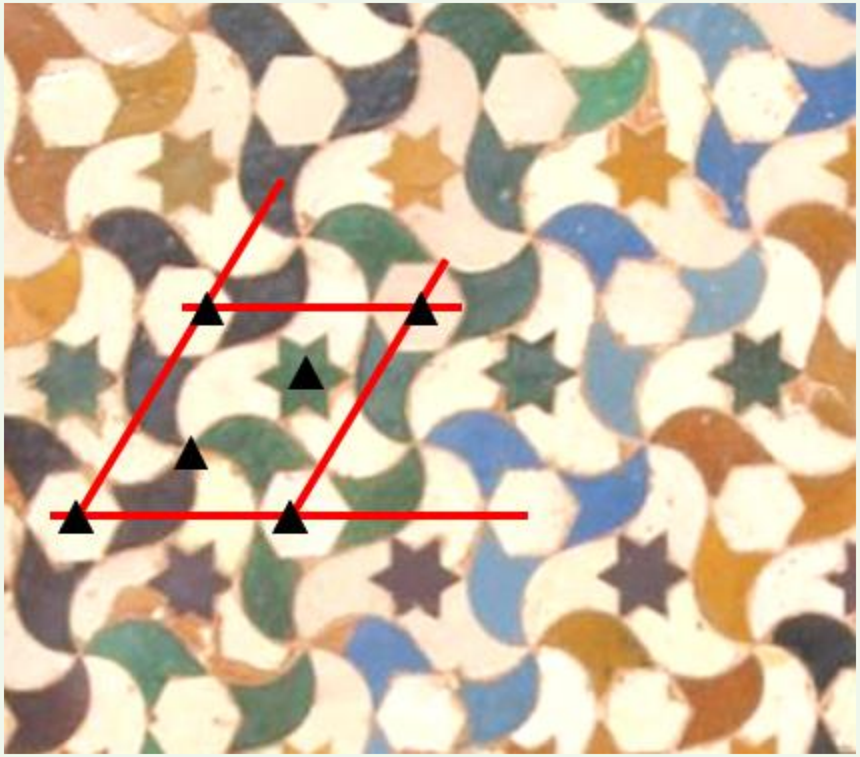



p1
p2
p3
cm
m
pmg
p4
p6
pgg
p4m
pm
pg
p4g
p31m
cm
pmm
p3m1
p6m

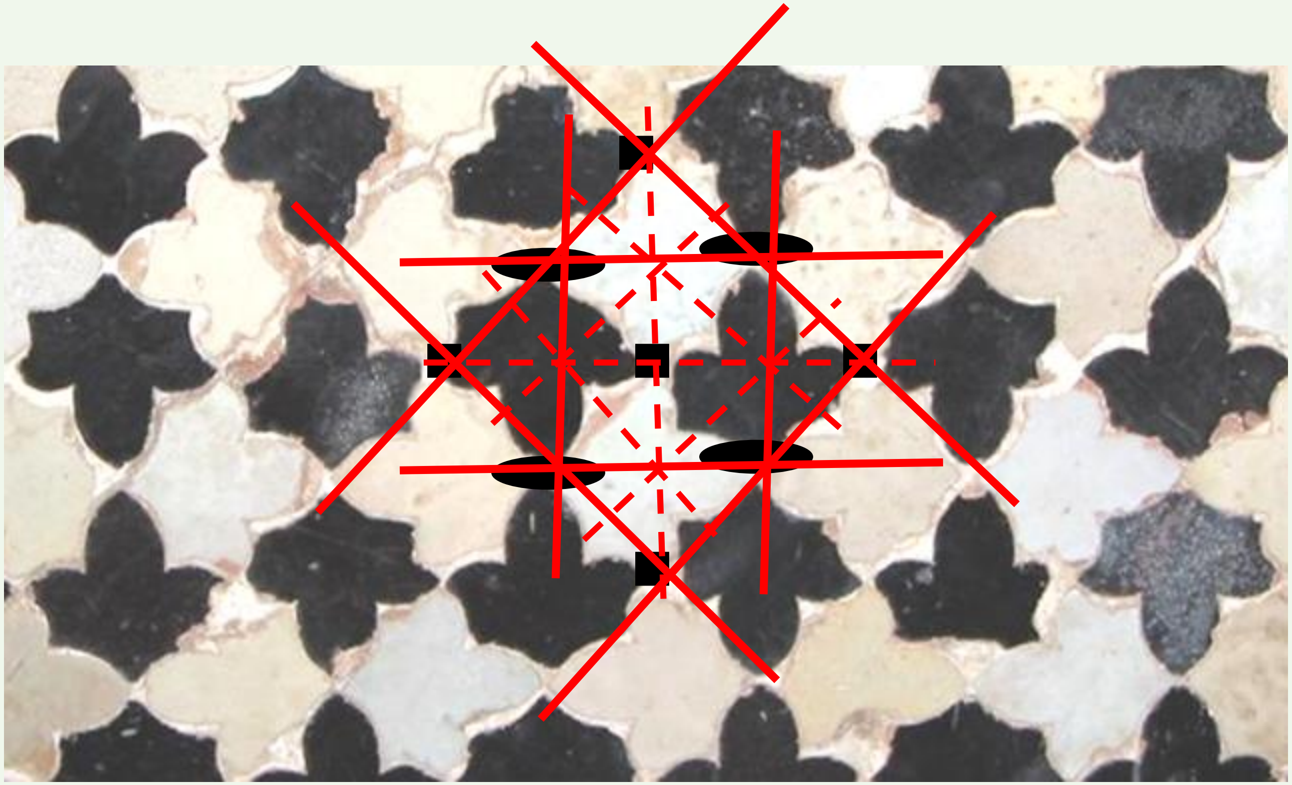
I gruppi cristallografici piani



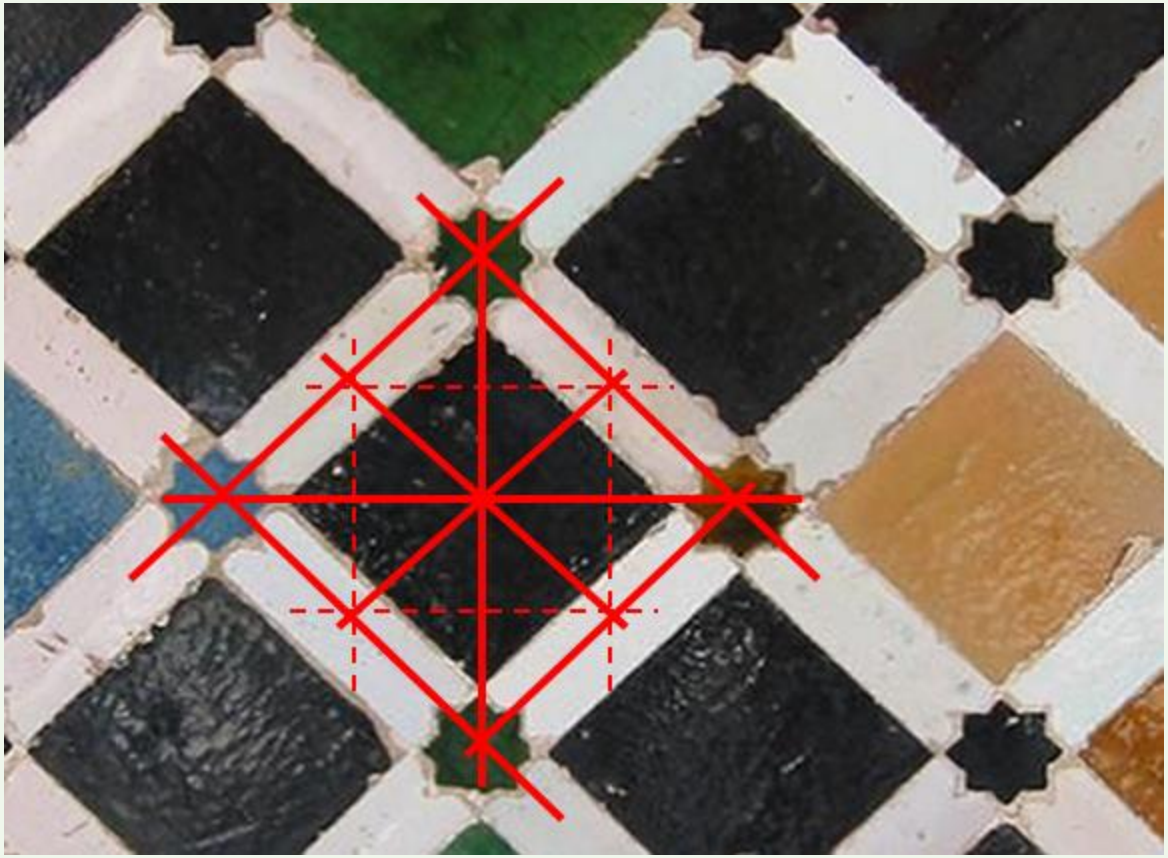
p3



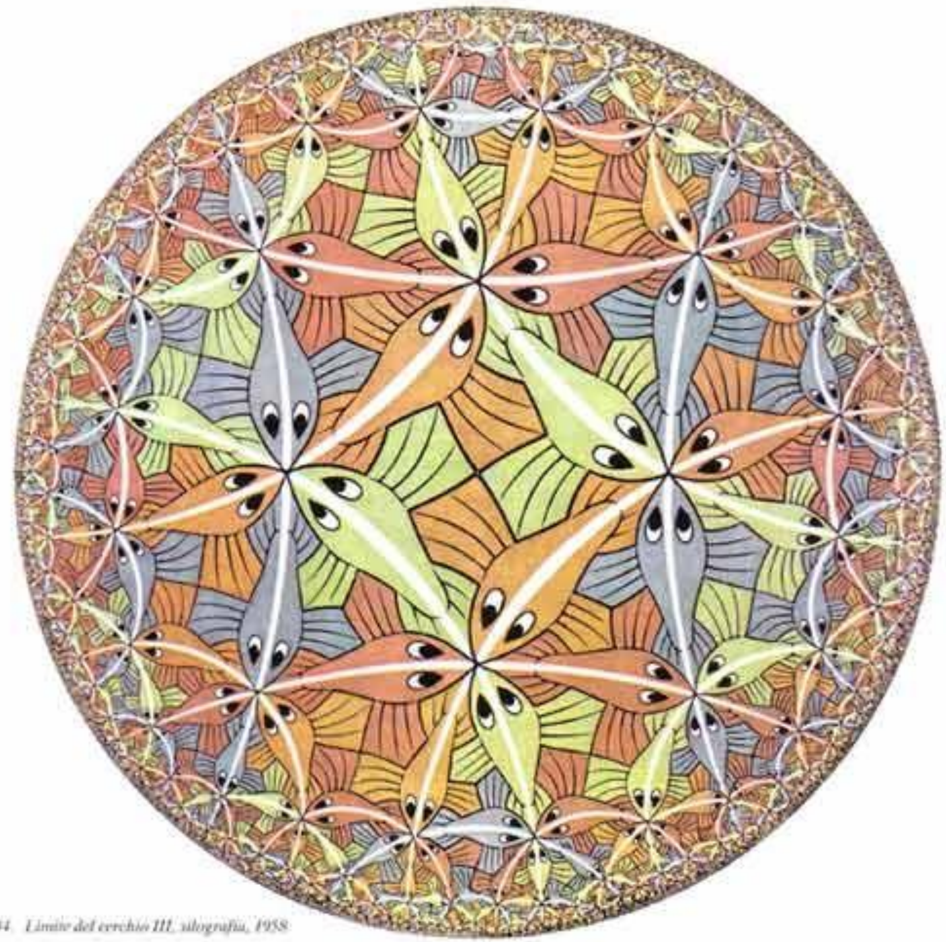
p4g



p4m



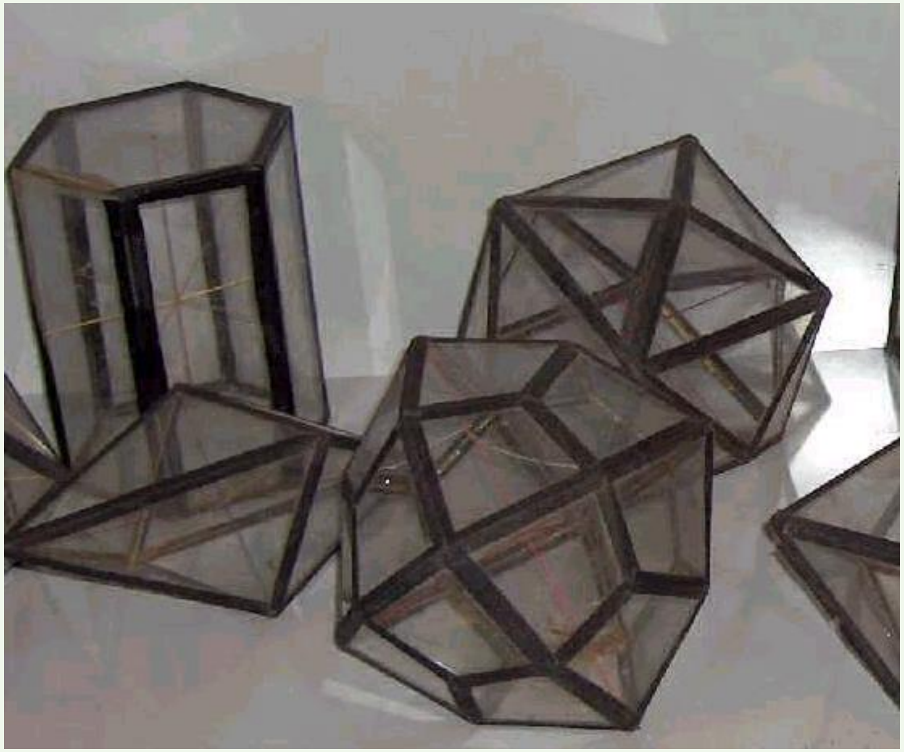
E in altri spazi ?



244. Limite del cerchio III, silografia, 1958

M.C. Escher:
Simmetria p3 nel piano iperbolico

Nelle altre dimensioni?



Teorema: un sottogruppo finito di rotazioni dello spazio è un gruppo ciclico oppure diedrale oppure il gruppo di simmetria rotazionale di un solido regolare (tetraedro, ottaedro, icosaedro).

Teorema: esistono 230 gruppi cristallografici in tre dimensioni

Il "*gruppo mostro*", il più grande dei gruppi semplici finiti, ha circa
$808.017.424.794.512.875.886.459.904.961.710.757.005.754.368 \times 10^9 =$
$= 2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71$ ($\sim 10^{54}$)
e rappresenta un gruppo di rotazioni dello spazio a 199.883 dimensioni

Bibliografia

H. Weil, *La simmetria*, Feltrinelli 1962

G. Caglioti, *Simmetrie infrante, nella scienza e nell'arte*, Clup 1983

E.H. Lockwood, R.H. Macmillan, *Geometric Symmetry*, Cambridge University Press 1978

S.V. Jablan, *Theory of Symmetry and Ornaments*, Beograd Mat. Institut n. 17, 1995 (http://www-sbras.nsc.ru/EMIS/monographs/jablan/)

M. Dedò, *Forme. Simmetria e topologia*, Zanichelli 1999

R. Betti, E. Marchetti e L. Rossi Costa (a cura), *La simmetria: una scoperta matematica*, Polipress 2007

G.E. Martin, *Transformation Geometry. An Introduction to Symmetry*, Springer 1982

M.A. Armstrong, *Groups and Symmetry*, Springer 1988

M. Du Sautoy, *Il disordine perfetto*, Rizzoli 2007 (*Finding moonshine*: *a mathematician's journey through symmetry*)

G. Lochak, *La géométrisation de la physique*, Flammarion 1994