Gauss e la geometria

Alberto Cogliati

Università di Pisa

February 10, 2020

Carl Friedrich Gauss, *Princeps Mathematicorum*

Figure: Ritratto di Gauss ad opera del pittore danese Albrecht Jensen

Carl Friedrich Gauss, *Princeps Mathematicorum*

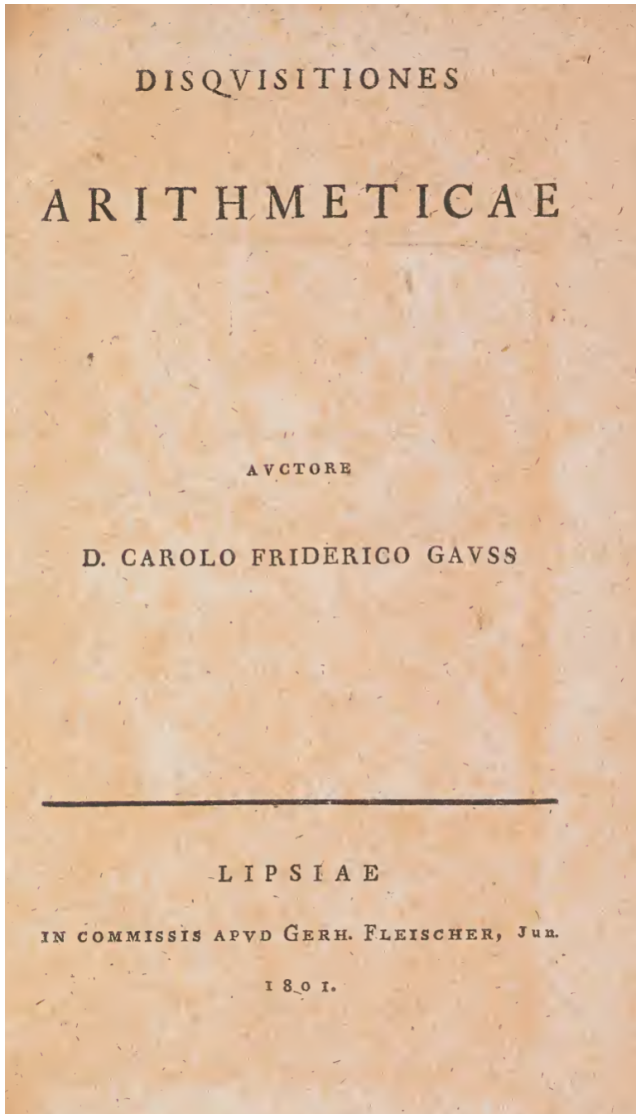
- Nacque a Brunswick (Braunschweig) il 30 Aprile 1777, da famiglia di modeste condizioni
- Studiò presso il Collegium Carolinum di Brunswick nel periodo 1792-1795
- Si trasferì a Gottinga per studiare nella locale Università, 1795-1798
- Pubblicò il trattato *Disquisitiones Arithmeticae*, 1801
- Determinazione dell'orbita di Cerere, 1801
- Sposò Johanna Ostoff (prima moglie) 1805
- Si trasferì a Gottinga dove assunse la direzione dell'Osservatorio Astronomico della città, 1807
- Pubblicò il suo secondo libro *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis Solem ambientium*, 1809
- Studi vari sulle serie infinite, teoria del potenziale, geodesia (Gauss supervisionò una campagna di rilevazioni geodetiche)
- Pubblicazione del fondamentale lavoro *Diquisitiones generales circa superficies curvas*, 1827-1828
- Si occupò di magnetismo terrestre in collaborazione con il fisico Wilhelm Weber, a partire dal 1832
- Morì a Gottinga il 23 Febbraio 1855

Carl Friedrich Gauss, un bambino prodigio

Wolfang Sartorius von Waltershausen (1809-1876), nella sua biografia su Gauss (*Gauss zum Gedächtnis*, 1862) scrisse:
Ancora giovanissimo Gauss mostrò rare doti mentali. Imparò a leggere semplicemente domandando a qualcuno in casa il suono delle lettere. La sua peculiare attitudine per i numeri e la facilità e l'accuratezza nel fare di conto mentalmente attrassero presto l'attenzione dei genitori e dei loro amici. Era solito raccontare sorridendo che imparò a contare prima di imparare a parlare.
Nel periodo estivo il padre si occupava di opere murarie. Il sabato sera, era sua abitudine pagare ai propri dipendenti la retribuzione per la settimana appena trascorsa, corrispondendo a quelli che avevano lavorato extra la paga corrispondente. In una di tali circostanze, avendo appena finito di calcolare il dovuto e sul punto di pagare la somma, giunse la voce di un bambino da un piccolo letto nell'angolo della casa. Senza che venisse notato, il bambino che allora aveva tre anni, aveva seguito le transazioni del padre. "Padre, il calcolo è sbagliato. E' così", disse, aggiungendo una certa cifra. Il calcolo fu ricontrollato e si trovò effettivamente che il risultato era ciò che il bambino aveva detto.

Carl Friedrich Gauss, un bambino prodigio

[...] *occorse un episodio che egli, ormai anziano, raccontava con divertimento e piacere. In questa classe il bambino che per primo terminava il proprio compito di aritmetica doveva porre la sua lavagnetta nel mezzo della cattedra del maestro. Sopra di questa il secondo apponeva la propria e così via. Il giovane Gauss era appena entrato in classe quando Büttner assegnò come esercizio il problema di sommare una successione aritmetica [nell'edizione inglese: la successione dei numeri dall'1 al 100]. Il problema era stato appena enunciato e subito Gauss appose la sua tavoletta sulla cattedra con queste parole (nel dialetto di Braunschweig): "Ecco qui" (Ligget se' [Da liegt sie]). E mentre gli altri alunni continuavano a sommare freneticamente, Büttner passeggiava tra loro, di tanto intanto inviando uno sguardo ironico verso il più giovane* [...].
Alla fine dell'ora, la pila di tavolette fu capovolta: quella di Gauss, dove compariva un numero solitario, era la prima. Quando Büttner lesse ad alta voce la risposta, con sorpresa di tutti i presenti, quella di Gauss si rivelò corretta. [...] *Büttner decise allora di scrivere ad Amburgo per richiedere un nuovo testo di aritmetica, più adatto alla eccezionale mente del giovane.*



DISQVISITIONES

ARITHMETICAE

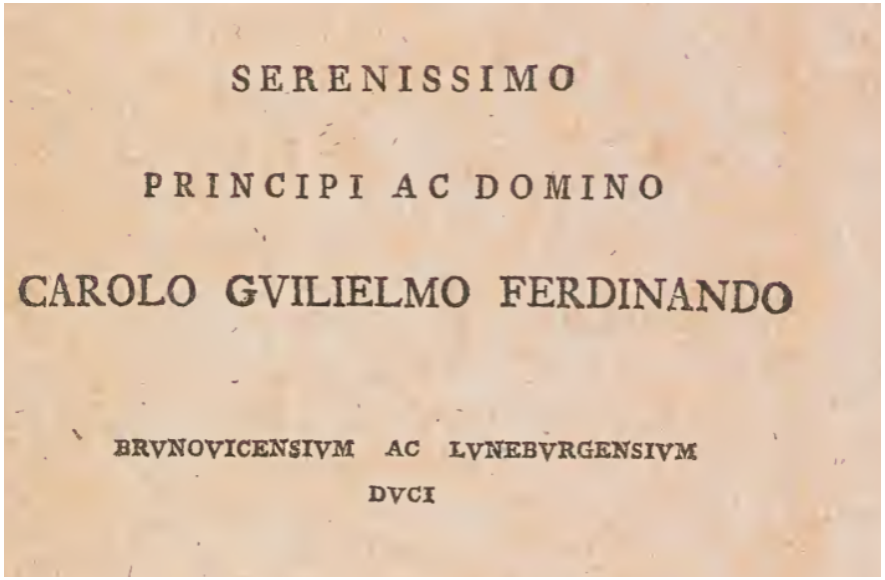
AVCTORE

D. CAROLO FRIDERICO GAVSS

LIPSIAE

IN COMMISSIS APVD GERH. FLEISCHER, Jun.

1801.



SERENISSIMO

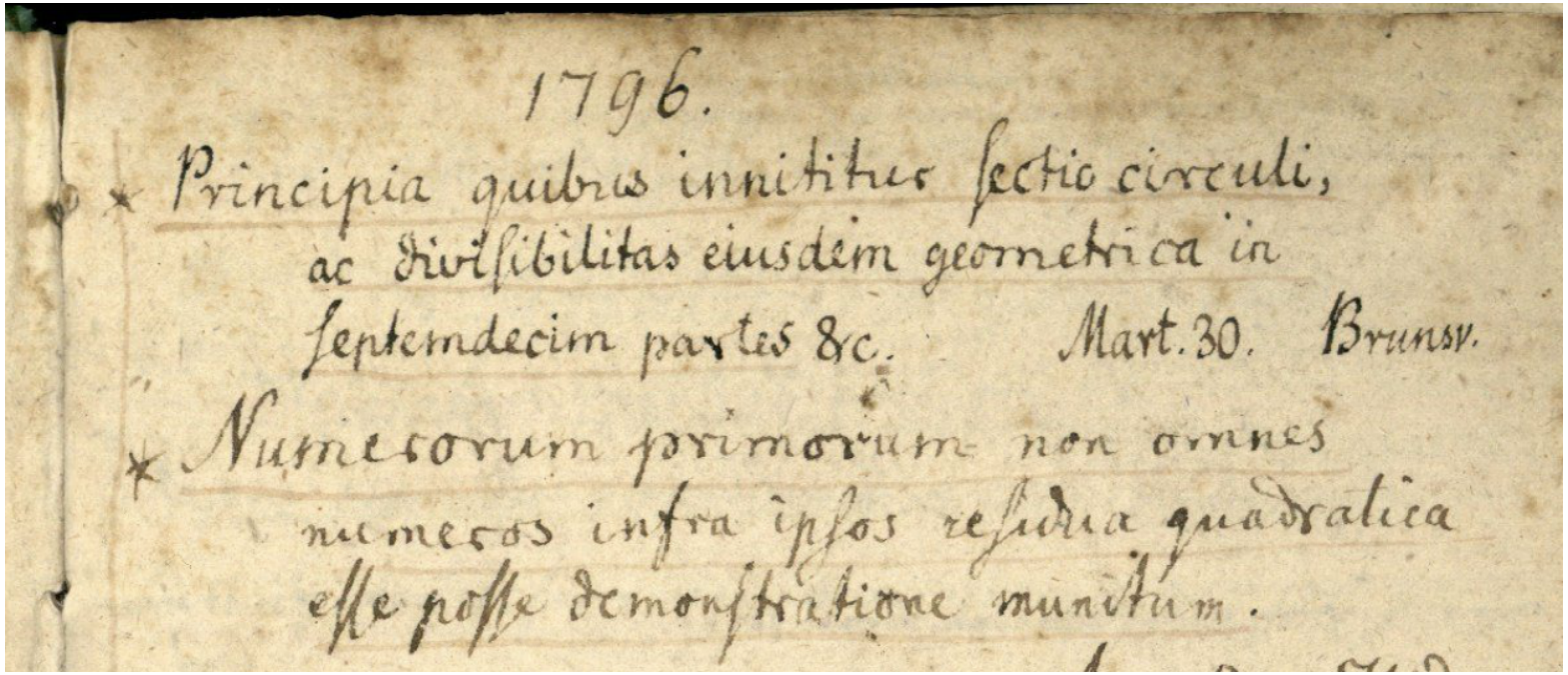
PRINCIPI AC DOMINO

CAROLO GVILIELMO FERDINANDO

BRVNOVICENSIVM AC LVNEBVRGENSIVM

DVCI

Si tratta di un diario informale nel quale per quasi vent'anni, Gauss tenne traccia delle sue scoperte matematiche. Rimane in possesso dei discendenti di Gauss fini al 1898, anno in cui un nipote di Gauss lo cedette allo storico Stäckel che si occupava, tra gli altri della pubblicazione delle *Werke*. Fu pubblicato per la prima volta nei *Mathematische Annalen*, 1903.

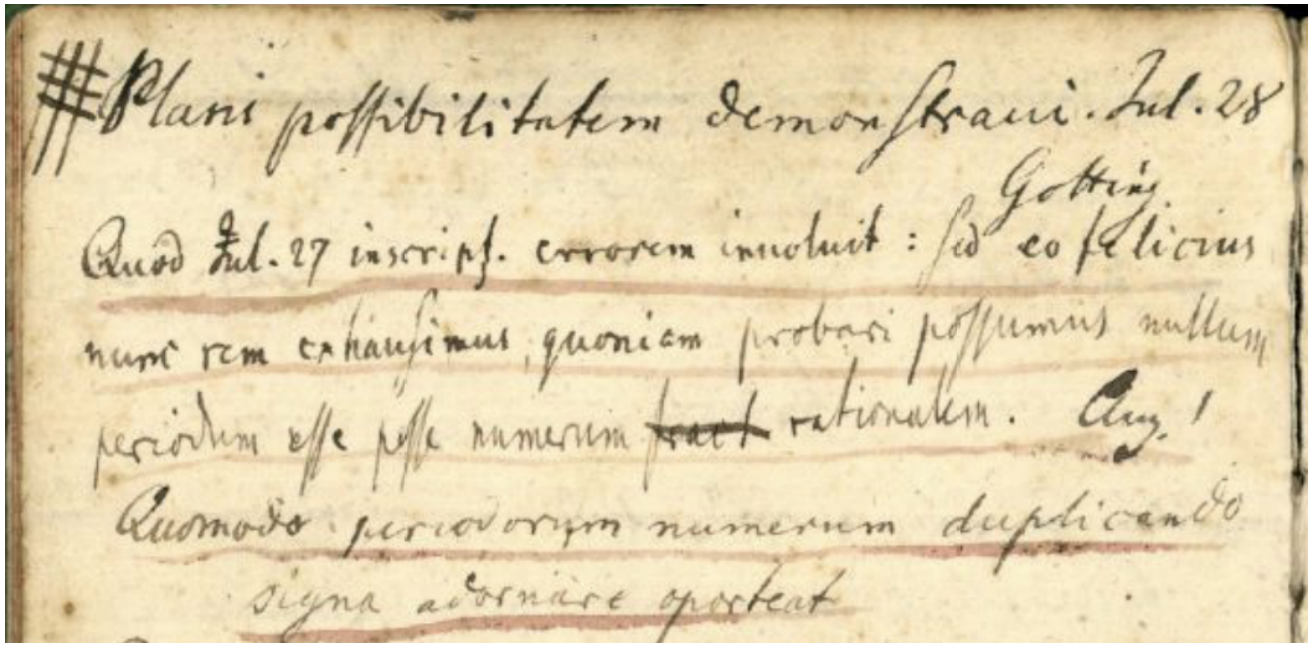

1796.

* Principia quibus innititur sectio circuli, ac divisibilitas eiusdem geometrica in septemdecim partes &c. Mart. 30. Brunsv.

* Numerorum primorum non omnes numeros infra ipsos residua quadratica esse posse demonstratione munitum.

Un diario matematico, 1796-1814

Fra gli scarni riferimenti alle ricerche geometriche troviamo nel Diario (Luglio 1797):


#Plani possibilitatem demonstraui. Jul. 28
Gotting
Quod Jul. 27 inscripsi. errorem inuoluit: sed eo felicius
nunc rem exhausimus, quoniam probari possumus nullum
periodum esse posse numerum ~~fract~~ rationalem. Aug. 1
Quomodo periodorum numerum duplicando
signa adornare oporteat

Il problema storiografico di valutare la natura e la rilevanza delle ricerche di Gauss nel campo delle geometrie non-euclidee è di non facile soluzione; esso si deve confrontare con la ben nota ritrosia del *princeps mathematicorum* a pubblicare i risultati non adeguatamente rifiniti delle proprie ricerche e con il timore esplicitamente confessato di attirare le "strida" dei critici. Tale circostanza ci ha consegnato una scarna traccia di materiale manoscritto, per lo più lettere, dalle quali è possibile desumere solo una vaga e imprecisa idea dell'estensione e della profondità delle ricerche di Gauss sul tema della teoria delle parallele.
Al di là di queste oggettive difficoltà storiografiche, un fatto sembra stabilito con certezza: fin da giovanissimo, Gauss ebbe piena consapevolezza dello stato insoddisfacente delle ricerche intorno ai fondamenti della geometria e dei problemi posti dall'assioma delle parallele.

Gauss e la geometria "non-euclidea"

Un primo interessante documento che attesta l'interesse e la dedizione di Gauss per tali questione è una lettera che egli scrisse all'amico e compagno di studi all'Università di Gottinga, Farkas Bolyai (padre del più celebre Janos Bolyai), il quale aveva accennato a Gauss delle ricerche che aveva intrapreso sui fondamenti della geometria. Il documento suggerisce, pur in maniera un po' vaga, il grado di profondità degli studi di Gauss sull'argomento. Degno di nota è la scoperta qui menzionata della equivalenza fra il postulato delle parallele di Euclide e l'esistenza di triangoli di area arbitraria, la cui negazione rappresenta in effetti una delle proprietà fondamentali della geometria iperbolica.

Mi rincresce non aver sfruttato la nostra precedente maggiore vicinanza per saperne di più sul tuo lavoro sui fondamenti della geometria; mi sarei sicuramente risparmiato molti sforzi inutili e sarei diventato più tranquillo, nella misura in cui ciò è possibile per qualcuno come me, dal momento che ancora così tanto resta da fare in un tale oggetto. Io stesso ho fatto molti progressi nel mio lavoro anche se le mie altre attività molto eterogenee non mi lasciano molto tempo; il percorso che ho intrapreso non porta all'obiettivo desiderato e che tu stesso hai assicurato di aver raggiunto, ma piuttosto, conduce a dubitare della verità della geometria. Ho trovato ciò che per i più si qualificherebbe come una dimostrazione [del postulato delle parallele], ma che ai miei occhi non prova alcunché; ad esempio, se si potesse dimostrare che esistono triangoli rettilinei la cui area è maggiore di ogni regione assegnata, allora sarei nelle condizioni di giustificare rigorosamente l'intera geometria. I più sarebbero portati a considerare ciò alla stregua di un assioma; non io; sarebbe possibile che, per quanto lontani gli uni dagli altri siano assunti i vertici di un triangolo nello spazio, tuttavia l'area si mantenga sempre inferiore ad un certo limite. Dispongo di molti risultati simili, ma in nessuno io scorgo nulla di soddisfacente.

Gauss a Bolyai Senior, Settembre 1804

Una successiva missiva all'indirizzo dello stesso Bolyai, del settembre 1804, restituisce l'immagine di una maggiore cautela e di un Gauss che ancora agli inizi del secolo coltivava la speranza di poter pervenire alla dimostrazione del postulato euclideo.

Ho letto il tuo saggio con estremo interesse e con attenzione e ne ho davvero apprezzato il grande acume. Ma tu non vuoi la mia lode vuota, la quale potrebbe anche sembrare di parte perché le tue idee hanno molto in comune con le mie, con le quali ho cercato di risolvere questo nodo gordiano e ho provato finora invano. Vuoi solo il mio giudizio sincero, non mascherato. E questo è che la tua procedura non è ancora abbastanza per me. Voglio provare a scoprire la pietra dello scandalo che ancora vi scorgo (e che appartiene anche allo stesso genere di scogli sui quali i miei tentativi finora hanno fallito) con la massima chiarezza possibile. Spero ancora che quelle scogliere un giorno consentano il passaggio prima della mia dipartita. Tuttavia, ora sono assorbito da una serie di altre occupazioni che al momento mi impediscono di dedicarmi al problema, e credimi, sarei molto felice se mi potrai anticipare e se sarai in grado di superare tutti gli ostacoli. Farei quindi di tutto con il massimo piacere per renderti il tuo merito e per metterlo in luce, per quanto posso.

Gauss a Olbers, Aprile 1817

In anni successivi Gauss espresse, in maniera sempre più frequente, la convinzione dell'impossibilità di giungere a una dimostrazione della necessità della geometria euclidea. Testimonianza di un tale mutamento prospettiva è una lettera che scrisse all'amico Wilhelm Olbers nell'Aprile del 1817.

Sono sempre più convinto che la necessità della nostra geometria [cioè della geometria euclidea] non possa essere dimostrata, almeno non dall'intelletto umano e comunque non per la comprensione umana. Chissà, forse in un'altra vita perverremo ad altre visioni circa la natura dello Spazio che ora ci appaiono irraggiungibili. Sino a quel momento, non si dovrebbe porre la Geometria sullo stesso piano dell'Aritmetica, che è puramente a priori, bensì accanto alla Meccanica.

Le ricerche di Gauss

Furono ricerche private che solo con timore e riluttanza Gauss condivideva con una ristrettissima cerchia di amici e corrispondenti.

Mi rallegro che Ella abbia il coraggio di esprimersi come se ammettesse la possibilità che l'ordinaria teoria delle parallele, e quindi tutta la nostra geometria, fosse falsa. Ma le vespe, il cui nido Ella disturba, Le voleranno attorno al capo [...] (Lettera di Gauss a Gerling, Agosto 1818, In *Gauss Werke Band 8.*)

Interessante è una lettera di Gauss a un certo Franz Adolph Taurinus (1794-1874), il quale nell'Ottobre 1824 aveva inviato a Gauss un proprio tentativo di dimostrazione del quinto postulato di Euclide.

Nulla ho da eccepire (o almeno non molto) al suo tentativo eccetto il fatto che è incompleto. Certamente la sua presentazione della dimostrazione che la somma dei tre angoli di un triangolo non può eccedere 180 gradi richiede qualche affinamento nel rigore geometrico. Ciò dovrebbe essere fatto e non c'è dubbio che questa impossibilità può essere dimostrata in tutto rigore. Tutt'altro discorso vale per la seconda parte: che la somma degli angoli non può essere inferiore a 180 gradi; in ciò consiste il vero nodo della questione, lo scoglio sul quale si abbatte ogni tentativo. Ritengo che Ella non abbia riflettuto a lungo sull'argomento. Dal canto mio, ci rifletto da più di trent'anni e non credo che esista qualcuno che se ne sia occupato più di me. L'assunzione che la somma degli angoli è inferiore a 180 gradi conduce a una geometria che è completamente diversa dalla nostra (euclidea) e completamente consistente. Ho sviluppato questa geometria in maniera soddisfacente ... (continua)

sino al punto da essere in grado di risolvere ogni questione che si presenta in essa con l'eccezione della determinazione di una costante che non si offre a priori. Al crescere di questa costante, la geometria in questione si avvicina sempre più alla geometria euclidea ed un valore infinito porta a far coincidere queste due geometrie. [...] **Tutti gli sforzi che ho compiuto per trovare una contraddizione, un'inconsistenza in questa geometria non-euclidea sono stati vani; la sola cosa nella quale essa sembra contraddire la nostra comprensione è che se fosse vera allora dovrebbe esistere una determinata grandezza lineare nello spazio (seppur incognita). Ma a me sembra che, a dispetto della conoscenza verbosa (Wort-Weisheit) dei metafisici, sappiamo davvero troppo poco, o persino nulla, sulla vera natura dello spazio per poter confondere qualcosa che ci sembra innaturale con ciò che è assolutamente impossibile.** *(Lettera di Gauss a Taurinus, in Gauss Werke, 8 Band).*

Le ricerche di Gauss: la celebre lettera all'amico Bessel

Vi è un altro argomento che per me è vecchio di quasi 40 anni e sul quale ho riflettuto spesso nelle ore libere dagli impegni: i principi primi della geometria. Non ricordo se ti ho mai parlato di questa faccenda. Ho nel tempo consolidato alcuni concetti e la convinzione che non si possa stabilire la geometria completamente a priori è divenuta via via più forte. Passerà parecchio tempo prima che io adatti le mie **assai estese** [enfasi nell'originale] *ricerche sull'argomento per la pubblicazione; probabilmente ciò non accadrà mai finché io sarò in vita, poiché temo le grida dei Beoti che si leverebbero nel caso in cui dessi voce alle mie vedute sull'argomento.* (Lettera di Gauss a Bessel, Gennaio 1829).

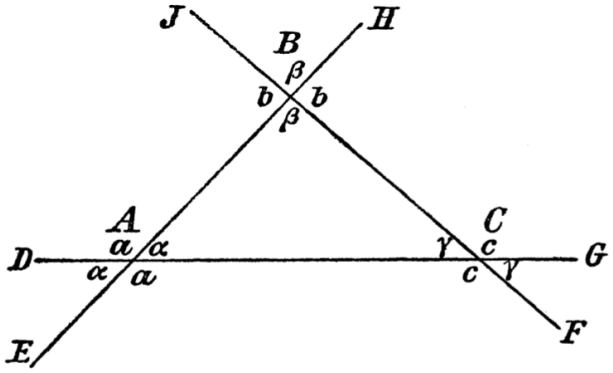
Lo scambio epistolare fra Gauss e Schumacher, 1831

Passo ulteriore nella revisione delle tradizionali concezioni geometriche, fu il riconoscimento della non-contradditorietà della geometria che scaturisce dalla negazione del postulato euclideo e che Gauss aveva dapprima denominato con l'espressione di geometria "anti-euclidea" (lettera a Wachter), di "geometria astrale" (seguendo la denominazione impiegata da Schweikart) e in seguito di geometria "non euclidea". Ciò emerge in maniera inequivocabile, ad esempio, in una lettera all'amico e collega astronomo Heinrich Christian Schumacher. La corrispondenza completa tra i due ammonta a 1416 lettere.

H. C. SCHUMACHER,
Professor der Astronomie

Schumacher (Copenhagen) a Gauss, Maggio 1831.

Mi concedo la libertà di inviarti un tentativo di dimostrazione del teorema che la somma di tutte e tre gli angoli di un triangolo rettilineo $= 180^o$, che non fa uso di rette parallele e della loro teoria. Da cui seguirebbe la prova dell'assioma euclideo. Altro non suppongo che la somma di tutti gli angoli attorno a un punto $= 360^o = 4R$ e che gli angoli opposti sono uguali. Dal momento che so per esperienza quanto si possa essere ciechi (almeno nel mio caso) nei confronti del proprio lavoro, ho molta paura che alla sua base via sia una *petitio principii*. Ma ora non sono in grado di rintracciarla e aspetto dunque da te istruzioni.
[Supplemento] Si prolunghino i lati di un triangolo rettilineo ABC qualunque



[Fig. 1.]

oppure, il che è lo stesso, si consideri un sistema di tre rette in un piano, le cui intersezioni determinano il triangolo ABC;

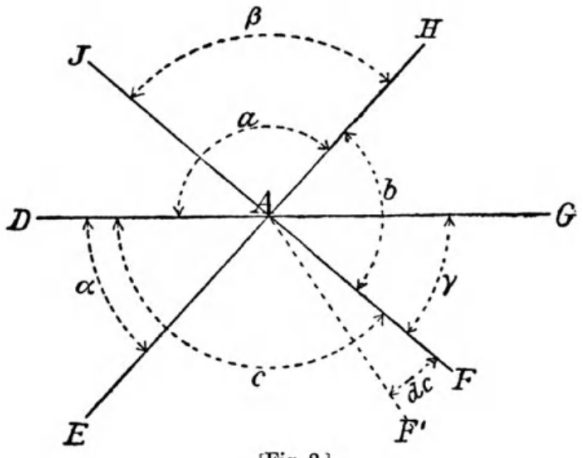
allora i tre angoli al vertice ci restituiscono le equazioni:

$$\begin{aligned} 2a + 2\alpha &= 4R, \\ 2b + 2\beta &= 4R, \\ 2c + 2\gamma &= 4R; \end{aligned} \tag{1}$$

allora sarà:

$$\alpha + \beta + \gamma = 6R - (a + b + c).$$

Poiché questa relazione sussiste qualunque sia la posizione dei punti A, B, C, o ciò che è indifferente, comunque siano tracciate le linee nello spazio, si lascino le rette $\overline{DG}, \overline{EH}$ immutate e si tracci la retta $\overline{JF}$ in maniera che formi con EH, lo stesso angolo individuato nella precedente posizione o, poichè questo angolo è arbitrario purché cada entro l'angolo a, abbiamo [...]



[Fig. 2.]

Schumacher (Copenhagen) a Gauss, Maggio 1831.

$$a + b + c = 4R,$$

e dunque

$$\alpha + \beta + \gamma = 2R$$

Ma a partire dall'ipotesi che

$$b \text{ [Figura 1]} = b \text{ [Figura 2]}$$

l'affermazione che

$$c \text{ [Figura 1]} = c \text{ [Figura 2]}$$

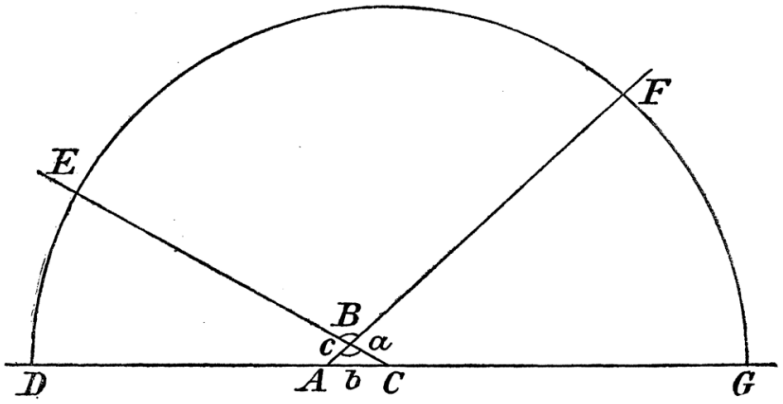
deve essere dimostrata?
A me pare che per l'arbitrarietà dell'angolo questa dimostrazione non sia necessaria. Queste sono le idee direttrici della dimostrazione. Aspetto il suo parere [...].

Gauss a Schumacher, Maggio 1831.

Rispetto a quanto mi scrivete sulle parallele avete visto bene. Nei vostri sillogismi avete fatto uso di un'affermazione intermedia (*Zwischensatz*) senza che la abbiate resa esplicita. E' la seguente: se due rette (1) e (2) formano con una terza retta (3), che le taglia, rispettivamente angoli A' e A'' e se una quarta (4), nel medesimo piano, è tagliata da (1) sotto il medesimo angolo, allora (4) sarà tagliata da (2) sotto l'angolo A''.
Il fatto è che questa affermazione non solo necessita di una dimostrazione ma anzi, si può dire, che è essa stessa l'affermazione che si intende dimostrare.
Da alcune settimane ho cominciato a scrivere qualcosa delle mie riflessioni a riguardo, ormai vecchie (almeno in parte) di 40 anni, delle quali non ho mai scritto nulla e che per 3 o 4 volte ho dovuto ripensare da capo. Non vorrei che questi miei pensieri scomparissero con me.

Schumacher a Gauss, Maggio 1831

Mio carissimo amico, ancora una volta la importuno con la teoria delle parallele.



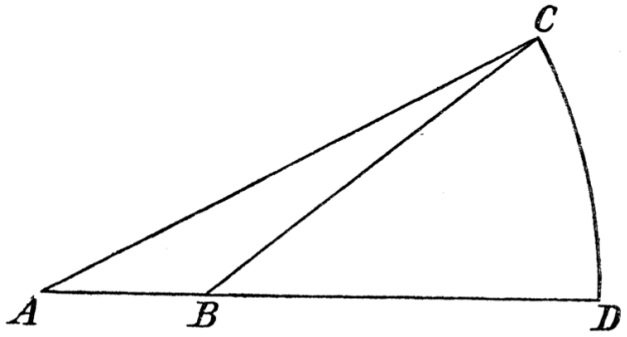
Si prolunghino i lati di un triangolo rettilineo qualunque e si prenda un raggio R così grande che $a/R, b/R, c/R$ sono più piccoli di qualunque grandezza data. Con questo raggio e con centro in C si descriva la semicirconferenza $DEFG$. Poiché rispetto a questa semicirconferenza i lati a, b, c possono essere trattati come nulli, così che i punti A, B risultano coincidere con C, allora questa semicirconferenza è la misura dei tre angoli del triangolo, che dunque non possono differire da 180°.
Mi sembra pertanto che se non si esclude il concetto di una crescita indefinita, allora questa dimostrazione molto semplice prova che in ogni triangolo finito e rettilineo la somma degli angoli è $= 180^o$

Gauss a Schumacher, Luglio 1831

Per quanto riguarda le linee parallele, mi sarebbe piaciuto molto scriverti il mio giudizio sulla tua prima lettera, se non avessi dovuto presumere che ti sarebbe stato di scarsa utilità senza sviluppi completi. Tali sviluppi completi, se vogliono essere veramente convincenti, richiederebbero forse argomenti concernenti la lunghezza di arco in risposta a ciò che in sostanza hai accennato solo in poche righe, ma per i quali attualmente non ho la mentalità richiesta. Per assicurarti della mia buona volontà, vorrei aggiungere quanto segue.
Voi considerate subito punti propri su ogni triangolo, ma potresti impiegare sostanzialmente il solito ragionamento se considerassi dapprima il caso più semplice e formulassi il teorema:
1) In ogni triangolo un lato del quale è finito, mentre il secondo lato, e di conseguenza anche il terzo sono infiniti, la somma dei due angoli è $= 180^\circ$

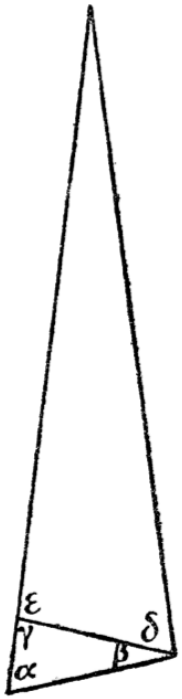
Gauss a Schumacher, Luglio 1831

Dimostrazione secondo la tua maniera:



L'arco di circonferenza CD dà la misura dell'angolo CAD così come dell'angolo CBD, giacché in una circonferenza di raggio infinito uno spostamento finito del centro devo essere considerato come nullo. Così:

$$CAD = CBD, \qquad CAD + CBA = CBD + CBA = 180^\circ.$$



Il resto si ottiene da sè facilmente. Infatti da questo teorema si ha:

$$\begin{aligned} &\alpha + \beta + \delta = 180^\circ \\ &180^\circ = \epsilon + \delta \\ &\gamma + \epsilon = 180^\circ. \end{aligned} \tag{2}$$

Così sommando si ha:

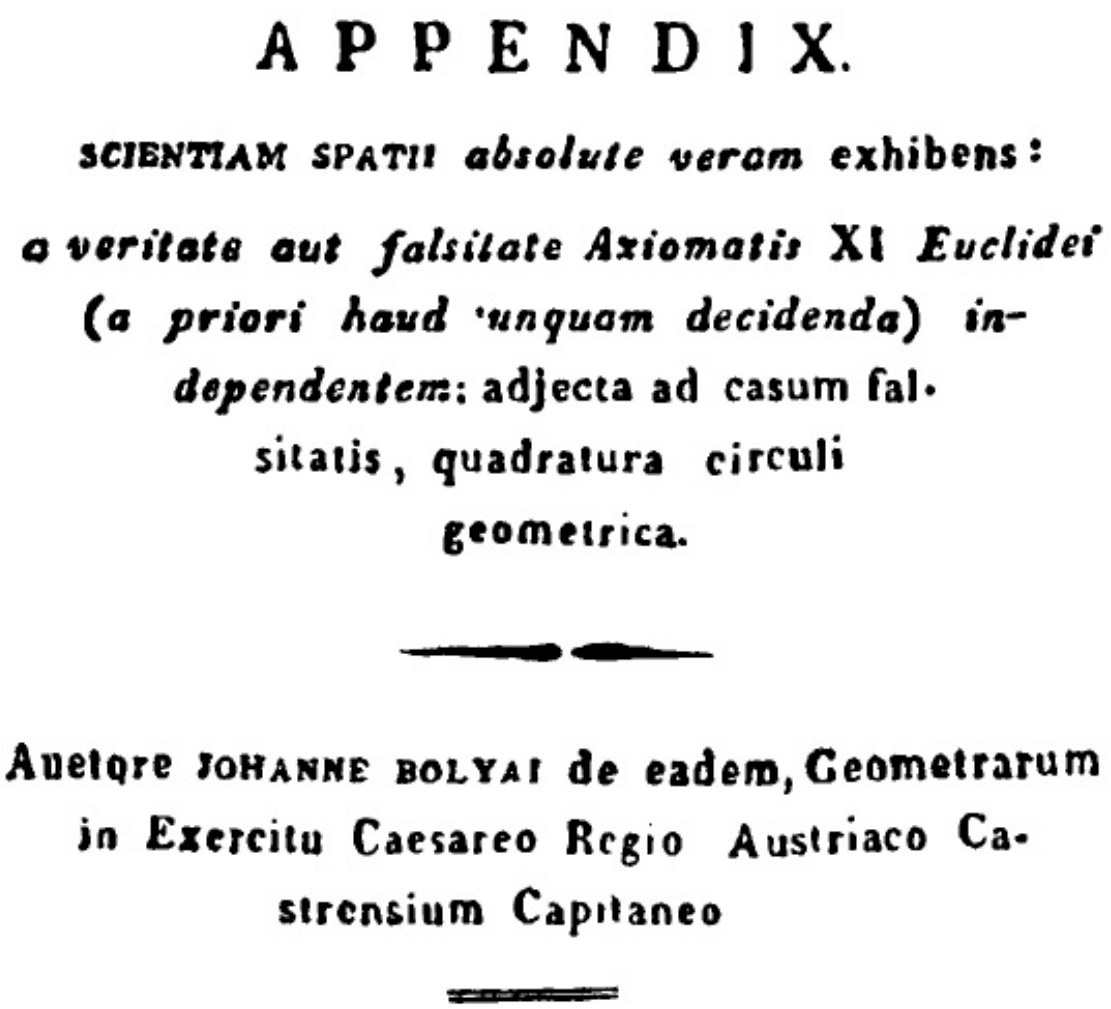
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Gauss a Schumacher, Luglio 1831

Ma per quanto riguarda la tua dimostrazione per 1), in primo luogo protesto contro l'uso di una grandezza infinita come di una finita, cosa che non è mai consentita in matematica. L'infinito è solo una *façon de parler*, quando si parla in realt limiti a cui certi rapporti si avvicinano, mentre altri crescono senza restrizioni. In questo senso, la geometria non euclidea non contiene nulla di contraddittorio in se stessa, anche se coloro [che imparano a conoscerla] devono inizialmente considerare molti dei suoi risultati come paradossali, ma ciøche è considerato contraddittorio sarebbe solo un inganno, causato dalla precedente abitudine di considerare la geometria euclidea come rigorosamente vera. Nella geometria non euclidea [Nicht-Euklidischen Geometrie] non esistono figure simili senza uguaglianza, ad es., gli angoli di un triangolo equilatero non sono solo diversi da $2/3R$, ma [in triangoli diversi] a seconda delle dimensioni dei lati, se il lato cresce indefinitamente, possono diventare piccoli quanto si voglia. [...]

János Bolyai

Figure: L'unica immagine affidabile che ci restituisce il volto di Bolyai



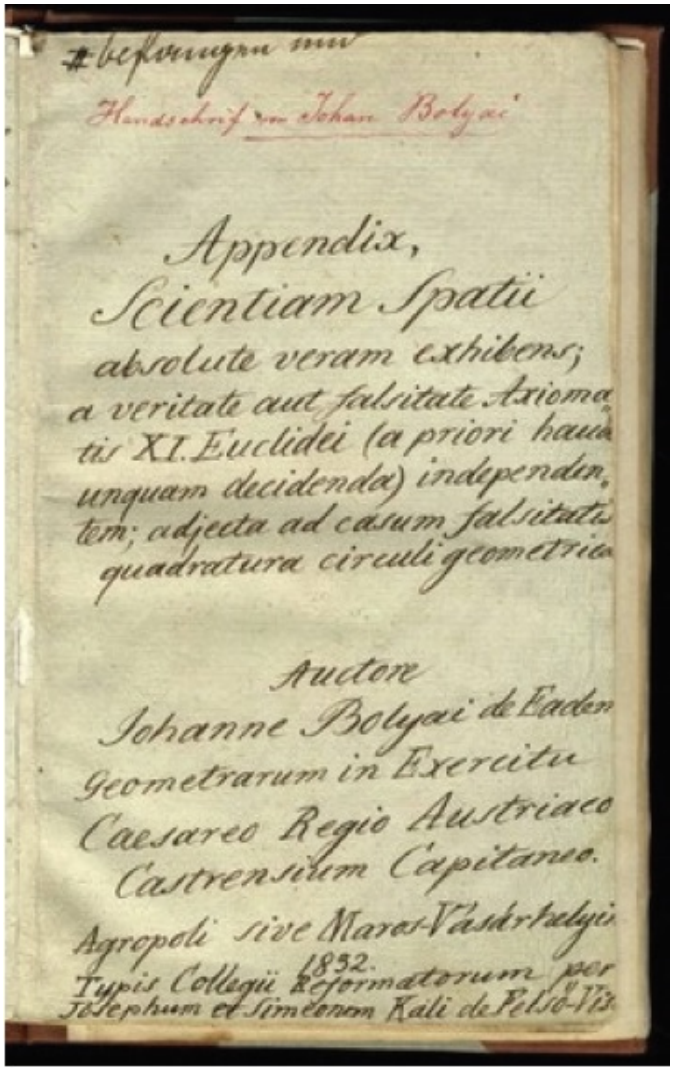
APPENDIX.

SCIENTIAM SPATII *absolute veram* exhibens:

a veritate aut falsitate Axiomatis XI *Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem*: adjecta ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica.

Auctore JOHANNE BOLYAI de eadem, Geometrarum in Exercitu Caesareo Regio Austriaco Castrensium Capitaneo

Figure: Il frontespizio dell'opera principale di Bolyai



Handschrift von Johann Bolyai

Appendix,
Scientiam Spatii
absolute veram exhibens;
a veritate aut falsitate Axioma
tis XI. Euclidei (a priori haud
unquam decidenda) independen,
tem; adjecta ad casum falsitatis
quadratura circuli geometrica

Auctore
Johanne Bolyai de Eaden
Geometrarum in Exercitu
Caesareo Regio Austriaco
Castrensium Capitaneo.

Agropoli sive Maros-Vásárhelyiensi
Typis Collegii Reformatorum per
Josephum et Simeonem Kali de Felsö-Vis
1832.

Figure: Il frontespizio (manoscritto) della stessa opera.

L'annuncio al padre Farkas

Sono risoluto a pubblicare un lavoro sulla teoria delle parallele non appena lo avrò messo insieme e completato e non appena si presenterà l'occasione. Non sono ancora giunto ad una vera e propria scoperta ma il cammino che sto seguendo mi porterà quasi certamente al mio obiettivo, ammesso che questo obiettivo sia possibile. Ancora non l'ho raggiunto ma ho scoperto cose così straordinarie da lasciare stupefatti. Sarebbe un peccato enorme se queste cose andassero perdute, come tu stesso, padre, dovrai ammettere quando le vedrai. Tutto ciò che posso dire per ora è che ho creato un nuovo mondo fuori dal nulla. Ciò che ti ho inviato sino ad ora è un edificio di carta paragonato ad una torre. (János al padre, 3 Novembre 1823)

Gauss a Farkas Bolyai, 1832

Se cominciassi dicendo che *non posso lodare questo lavoro*, certamente saresti sorpreso per un po'. Ma non posso dire altrimenti. Lodarlo significherebbe lodare me stesso. Infatti, l'intero contenuto del lavoro, il percorso seguito da tuo figlio, i risultati a cui è approdato, coincidono quasi interamente con le mie riflessioni che hanno occupato in parte la mia mente per i passati trenta o trenta cinque anni. E' per questo che sono rimasto così stupefatto. Per quanto concerne il mio lavoro, del quale finora ho pubblicato pochissimo su carta, la mia intenzione non era quella di pubblicare alcunché in vita. Infatti la maggior parte delle persone non ha idee chiare sulle questioni di cui stiamo parlando; e ho trovato davvero pochissime persone con un interesse particolare per ciò che ho comunicato loro sulla questione. [...] Era mia idea mettere su carta tutto ciò di modo che non perisse con me. E' dunque una piacevole sorpresa scoprire che mi è stata risparmiata la fatica e sono felicissimo che sia stato il figlio del mio vecchio amico ad avere precedenza su di me in un modo così rimarchevole.

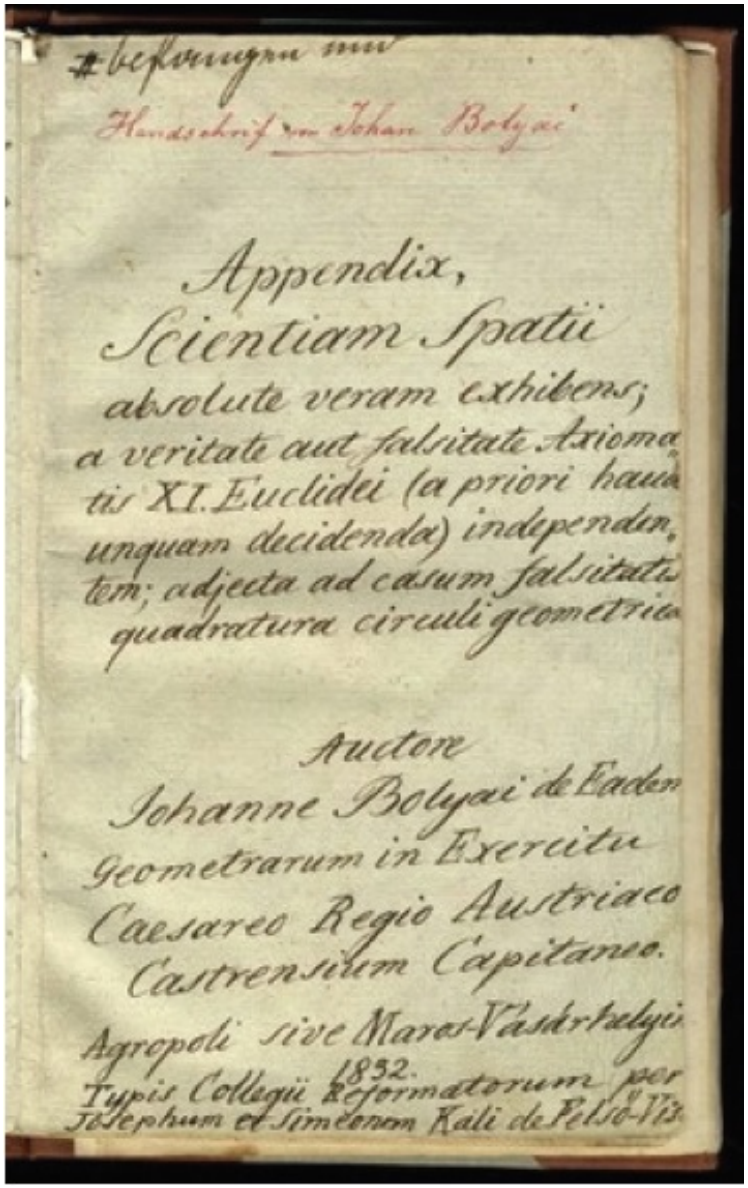
Alcuni risultati inaspettati

- Triangoli simili sono necessariamente congruenti
- L'area dei triangoli dipende dalla somma degli angoli interni e non può superare una certa soglia. Nel caso in cui la curvatura è -1, tale soglia è π.
- Non esistono quadrati, nel senso che non esistono poligoni regolari con angoli retti....
- Ma... vale il seguente risultato:

Theorem

Dato $n \geq 3$ e $\alpha \in \left(0, \frac{n-2}{n}\pi\right)$, allora esiste un poligono iperbolico regolare con n lati e angoli interni pari ad α.

... e la quadratura del cerchio?



Handschrift von Johan Bolyai

Appendix,
Scientiam Spatii
absolute veram exhibens;
a veritate aut falsitate Axioma
tis XI. Euclidei (a priori haud
unquam decidenda) independen,
tem; adjecta ad casum falsitatis
quadratura circuli geometrica

Auctore
Johanne Bolyai de Eaden
Geometrarum in Exercitu
Caesareo Regio Austriaco
Castrensium Capitaneo.

Agropoli sive Maros-Vásárhelyiei
1832.
Typis Collegii Reformatorum per
Josephum et Simeonem Kali de Felsö-Vis

... e la quadratura del cerchio?

Bolyai dimostra un risultato sorprendente, che oggi possiamo riformulare così:

Theorem

Si consideri un quadrilatero regolare con angoli acuti σ e un cerchio nel piano iperbolico con la medesima area ω (necessariamente minore di 2π). Allora entrambi sono costruibili con riga e compasso se e solo se σ è un multiplo intero di $\frac{2\pi}{n}$ dove n è un numero intero tale che $\frac{2\pi}{n}$ è un angolo costruibile nel piano euclideo.